

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ, ПЕРСОНАЛИИ

УДК 929 + 519.677 + 512.8

**ИОГАНН М. Х. БАРТЕЛЬС — НЕ ТОЛЬКО НАСТАВНИК  
ГАУССА И ЛОБАЧЕВСКОГО  
(к 240-летию со дня рождения И. М. Х. Бартельса)****В. П. Одинец**

*Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,  
Россия, 191186, Санкт-Петербург, набережная реки Мойки, д. 48;  
e-mail: W.Odyniec@mail.ru*

Статья посвящена жизни и творчеству Иоганна М. Х. Бартельса, его роли в развитии математики в России. Освещены достижения Бартельса, существенно опередившие аналогичные результаты Бине, Коши, Френе.

*Ключевые слова:* И. М. Х. Бартельс, биография, формулы Френе.

Иоганн Мартин Христиан Бартельс (Johann Martin Christian Bartels) родился 12 августа 1769 г. в Бруншви́ке (Брауншвейг). Умер в ночь с 18 на 19 декабря 1836 г. в Дерште (Тарту).

Отец Иоганна, Генрих Элиас Фридрих (H. E. F. Bartels, 1743–1819), был небогатым литейщиком, но имел собственный дом, который стоял по соседству с домом родителей К. Ф. Гаусса. Любопытным совпадением является то, что как мать И. Бартельса, Иоанна Христиана Маргарет Кёлер (J. C. M. Köler), так и мать К. Ф. Гаусса, Доротея Бензе, были старше своих мужей.

Дедушки Иоганна Бартельса, в отличие от дедушек Гаусса, бывших бесправными батраками, были ремесленниками в Бруншви́ке. Дедушка по отцу, Иоганн Пауль Бартельс (1715–1771), был пивоваром, а дедушка со стороны матери, Иоганн Мартин Кёлер, — инструментальщиком.

О жизни Иоганна Мартина Бартельса нам известно прежде всего из автобиографии, которая содержится в предисловии к его “Лекциям по математическому анализу” [1]. Учение Бартельс начал, как и большинство детей ремесленников, в школе сиротского приюта, напминавшей “реальные” школы, появившиеся позже. Затем продолжил учебу в школе “письма и счета” [1]. В 1783 г. Бартельс становится в этой школе помощником учителя, а годом позже эту школу стал посещать семилетний Гаусс.

В автобиографии Бартельс не вспоминает о своих индивидуальных занятиях в школе с молодым Гауссом. С другой стороны, об этом достаточно



подробно написал первый биограф Гаусса, Вольфганг Сарториус фон Вальтерсхаузен (W. S. von Waltershausen, 1809–1876) [2], который подчеркивал, что Бартельс обратил внимание на математический талант Гаусса лишь после трех лет учебы последнего (т. е. в 1787 г. — сравните с широко распространенным мифом о математических успехах семилетнего Гаусса) и тогда же предложил ему совместные дополнительные занятия по математике<sup>1</sup>. Интенсивные занятия продолжались только год, до 1788 г., поскольку именно тогда Бартельс начинает учиться в Коллегиум Каролинум, а Гаусс — в гимназии Катаринеум.

Следующий период их непосредственных контактов (их переписка не прерывалась [3]) наступил 17 лет спустя, в 1805 г., когда они, будучи уже зрелыми учеными, вновь встретились в Бруншвику, где поддерживали интенсивные товарищеские контакты до отъезда Бартельса в октябре 1807 г. (Гаусс задержался в Бруншвику до переезда в Гёттинген в начале 1808 г.).

В Коллегиум Каролинум Бартельс начинает изучать латынь и греческий, а также итальянский, французский и английский языки. По словам самого Бартельса [1, с. 3], языками он овладел настолько, что стал давать уроки по математике студентам из Англии, которые приехали в Бруншвик для учебы и не знали немецкого языка. Кроме того, он помогает преподавателю Коллегиум'а Эберхарду А. фон Циммерману<sup>2</sup> (1743–1815), ведущему занятия по алгебре, геометрии и тригонометрии, переводами с этих языков при издании “Географических Анналов”.

В 1791 г. Бартельс становится студентом юридического факультета государственного университета в Хельмштедте. Вместе с будущим профессором математики К. Шталем (K. Stahl, 1771–1853) он ходит дополнительно на лекции по интегральному исчислению профессора Иоганна Пфаффа (J. F. Pfaff, 1765–1825), будущего руководителя диссертационной работы Гаусса. Пфафф, заметив несомненный математический талант Бартельса, убеждает его посвятить себя целиком математике, в результате Иоганн Бартельс принимает решение об учебе (с 1793 г.) в университете в Гёттингене.

Именно здесь он слушает лекции профессоров А. Кестнера (A. Kästner, 1719–1800) по математике и К. Лихтенберга (K. Lichtenberg, 1742–1799) по физике. В отличие от Гаусса, который стал посещать лекции Кестнера двумя годами позже, когда последнему уже исполнилось 75 лет и его здоровье пошатнулось, Бартельс вспоминает Кестнера весьма тепло.

Среди новых друзей, которые появились у Бартельса в Гёттингенском университете [1], можно отметить Ф. Хасслера (F. R. Hassler, 1770–1843), будущего основателя и первого директора Американского департамента геоде-

<sup>1</sup> Из писем Гаусса известно, что за год они изучили в общих чертах теорему о биноме и теорию бесконечных рядов.

<sup>2</sup> Вероятно, именно в этот период Бартельс рассказал о Гауссе Э. Циммерману и, благодаря последнему, на талантливого юношу обращает внимание курфюрст Бруншвика Карл Вильгельм Фердинанд (1735–1806). Позднее, в 1796 г., именно Э. Циммерман делает достоянием широкой гласности результат Гаусса о возможности построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки, помещая (01.06.1796) сообщение об этом в рубрике “Новые открытия” в журнале “Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung” (“Бюллетень общей литературной газеты”).

зии, а позже директора Американской палаты мер и весов. Фердинанд Хасслер, как и Бартельс, начал свою академическую карьеру с изучения права (в Берне). Позже под влиянием профессора математики Иоганна Траллеса (J. Tralles, 1763–1822) он стал заниматься математикой и после переезда в 1805 г. в США стал там первоначально даже профессором математики военной академии (Вест-Пойнт). Бартельс переписывался с ним до конца жизни.

Другим приятелем Бартельса в Гёттингене станет будущий математик и астроном И. Боненбергер (J. G. F. Bohnenberger, 1765–1831), известность к которому придет после публикации книги “Астрономия” (1811) и создания электроскопа и гироскопа.

Основным источником существования Бартельса в Гёттингене, как и в Каролине, и в Хельмштедте, были частные уроки математики.

В 1795 г. Бартельс прерывает учебу в Гёттингене из-за отсутствия какого-либо интереса среди студентов к изучению математики (как он сам пишет в [4], “. . . из тысячи студентов Гёттингена едва ли только шестеро интересуются математикой”) и выезжает в вольное государство Граубюнден (ныне кантон Graubünden в Швейцарии), в семинарии которого он преподает математику. Семинария помещалась в замке Райхенау. Состав её преподавателей был достаточно любопытен. В частности, в 1793/94 учебном году математику в этой семинарии преподавал будущий король Франции (в 1830–1848 гг.) Людовик Филипп I (1773–1850) из орлеанской линии Бурбонов.

В Райхенау Бартельс провел три года. За это время он переводит с французского на немецкий пятитомную историю астрономии, написанную в 1775–1787 гг. французским астрономом и политиком Ж. Байи (J. S. Bailly, 1736–1793), казненным в год Террора. Перевод Бартельс разбивает на два тома, добавляя к ним собственный комментарий и посвящая работу [5] профессору Э. Циммерману. Оба тома вышли в Лейпциге в 1796 и 1797 г.

В 1798 г. политическая ситуация в Граубюндене становится небезопасной. Дело в том, что один из новых друзей Бартельса, Иоганн Генрих Чшокке (J. H. Zschokke, 1771–1818), занявший в начале 1796 г. пост директора семинарии, был не только одним из популярнейших драматургов Германии, но и одним из вождей движения за создание Гельветической Республики (конфедерации кантонов), начало которой должно было положить соединение Швейцарии и вольного государства Граубюнден. В результате осенью 1798 г. Граубюнден был оккупирован австрийцами, а в марте 1799 г. — французами. Именно тогда Бартельс решает вернуться в Бруншвик.

В это время в Бремене жила сестра Бартельса, которая сообщила ему о вакансии в местном университете. Однако условием занятия должности было обладание титулом доктора философии. За короткий срок Бартельс пишет диссертацию “Elementa Calculi Variationum”<sup>3</sup> и при поддержке К. Шталя, ставшего к тому времени профессором факультета философии университета в Иене, представляет её в этот университет.

<sup>3</sup> “Элементы вариационного исчисления”. Эта работа никогда не была опубликована.

18 июля 1799 г. Бартельс получает *in absentia* (заочно)<sup>4</sup> звание доктора философии [6]. Осенью 1799 г. Бартельс едет в Бремен, однако неизвестно, был ли он принят на работу в университет. Зато мы знаем [7, 8], что в том же 1799 году Бартельс женится на Анне Салюц (A. Saluz, 1784–1847), дочери основателя латинской школы в граубюнденском городе Кур (Chur) П. фон Салюца (P. von Saluz, 1757–1786).

Необходимость кормить семью заставляет Бартельса вернуться в Швейцарию (в Аарау), и в 1800–1804 гг. он преподает там математику, сначала в реальной школе, а затем в той же школе, но преобразованной в школу кантональную.

У Иоганна и Анны Бартельс было двое детей: сын Эдуард (1803–1837), который станет военным врачом в России, и дочь Иоанна (1807–1867), вышедшая в начале 1835 г. замуж за овдовевшего к тому времени известного астронома Вильгельма Струве (W. Struve, 1793–1864) — основателя и первого директора (с 1839 г.) Пулковской обсерватории.

В Аарау приятелем Бартельса становится коллега по школе Франц Ксаверий Броннер (F. X. Bronner, 1758–1850), для которого физика и учительство были лишь одним из многих увлечений (литература, рыбалка, публицистика, издательское дело, политика), и везде он достигал немалых результатов<sup>5</sup>. Не случайно позднее Бартельс добьется для него должности профессора физики в Казанском университете в 1810–1817 гг. [4, 9, 10].

К сожалению, финансовая сторона работы в кантональной школе в Аарау перестала удовлетворять Бартельса, и он начинает поиск лучше оплачиваемой работы: в Бруншвице (в основном через Гаусса) и в России (через выходца из Швейцарии Николая Ивановича Фусса (Nicolaus Fuss, 1755–1825) — помощника Леонарда Эйлера и мужа его внучки, — который с 1800 г. был уже постоянным секретарем Петербургской академии наук).

К 1804 г. в России уже существовал план создания Казанского университета. Преподавателей для этого университета должен был набирать тогдашний вице-президент Петербургской академии наук Степан Яковлевич Румовский (1734–1812), назначенный для этого в 1803 г. попечителем Казанского учебного округа.

Н. И. Фусс был хорошо знаком с С. Я. Румовским, поскольку последний считал себя учеником Эйлера<sup>6</sup>. Поэтому Фусс обратился к Румовскому, рекомендуя пригласить Бартельса в Казанский университет. Румовский со своей стороны попросил у Бартельса для оценки какую-либо его работу. Не позд-

---

<sup>4</sup> Любопытно, что месяцем ранее в университете Хельмштедта также *in absentia* титул доктора философии получает Карл Гаусс.

<sup>5</sup> В историю немецкой литературы навсегда вошли его “Рыбацкие стихи и рассказы” (1787); в 1794–1798 гг. он был издателем цюрихской газеты; в 1783 г. рукоположен в проповедники ордена иллюминатов; в 1798 г. был секретарем заместителя правительства Гельветии.

<sup>6</sup> В 1754 г. Румовский был командирован на год в Берлин для изучения математики под руководством Эйлера.

нее конца 1804 г. Бартельс посылает (через Гаусса и Фусса) “Мемориал о математическом анализе”<sup>7</sup>. Эта работа получила столь высокую оценку, что Бартельс был немедленно приглашен на должность ординарного профессора Казанского университета.

Но именно в это время появились препятствия: герцог Бруншвика Карл Вильгельм Фердинанд (C. W. Ferdinand, 1735–1806) решает оставить Гаусса<sup>8</sup> и Бартельса в Бруншвике и предлагает им постоянную зарплату (по 800 талеров в год) и, кроме того, Бартельсу — должность профессора математики, а Гауссу — должность директора будущей обсерватории. В связи с этим Бартельс отказывается от предложенной должности в Казани, а Гаусс — от должности академика Петербургской академии наук и директора будущей обсерватории в Петербурге.

Румовский довольно спокойно принимает отказ Бартельса от должности и, более того, сообщает о присвоении Бартельсу звания почетного профессора Казанского университета, что давало возможность получения ежегодно двухсот рублей золотом.

Однако через год все жизненные планы Бартельса были перечеркнуты его ровесником Наполеоном (Napoleon, 1769–1821), когда 14 октября 1806 года в битве под Иеной герцог Бруншвика Фердинанд получает смертельное ранение и умирает в ноябре того же года.

После смерти герцога Фердинанда прекращается выплата зарплаты Бартельсу. Попытки найти какую-либо иную работу оказываются безрезультатными [12]. Всё это заставляет Бартельса написать письмо в Петербург с выражением согласия занять пост ординарного профессора Казанского университета. Не дождавшись ответа, Бартельс в октябре 1807 года вместе с женой, сыном и недавно родившейся дочкой решает ехать в Россию. Он не знает, что его письмо дошло до Петербурга и Румовский отдал распоряжение о назначении Бартельса с июня 1807 года ординарным профессором Казанского университета с выплатой соответствующего содержания.

О перипетиях поездки мы знаем из письма, отправленного Бартельсом Чшокке 23 декабря 1807 г. уже из Петербурга [4]. Вначале Бартельс доехал до Бреслау<sup>9</sup>, откуда послал очередное письмо Румовскому. Сделав остановку в Грюнберге<sup>10</sup>, он через Кюстрин<sup>11</sup> добрался до Кёнигсберга, а оттуда через Дерпт — до Санкт-Петербурга.

В Петербурге, кроме жалованья за семь истекших месяцев и денег (за почетного профессора) за два с половиной года [1, s. IX], Бартельс получает

<sup>7</sup> Большая часть “Мемориала...” вошла позднее (в 1822 г.) в работу [11].

<sup>8</sup> К этому моменту Гаусс тоже написал Фуссу о своем желании работать в России, и ему предложили должность академика Петербургской академии наук и директора будущей обсерватории. Звание иностранного члена-корреспондента этой Академии Гаусс получил еще в 1802 г.

<sup>9</sup> Ныне Вроцлав (польск.).

<sup>10</sup> Ныне Зелена-Гура (польск.).

<sup>11</sup> Ныне Костшин (польск.).

деньги на покупку необходимых книг. Не задерживаясь более в Петербурге, Бартельс выезжает в Казань, куда прибывает в феврале 1808 г. С марта этого года он начинает читать лекции по геометрии, плоской и сферической тригонометрии, астрономии и математическому анализу. Важными для оснований геометрии оказались лекции по истории математики, начатые Бартельсом в 1810 г. достаточно случайным образом. Как можно судить по архивным документам [9], лекции по истории математики основывались на книгах Жана Э. Монтюкля (J. E. Montukla, 1725–1799) [13]. В октябре 1810 г. Бартельс в ходе лекции об Александрийской академии обратил внимание слушателей, а среди них был и Н. И. Лобачевский (1792–1856), на V постулат Евклида и на попытку доказательства этого постулата [9]. Лобачевскому было тогда 18 лет, и он был студентом второго курса. Заслуживает внимания тот факт, что, как напишет позже Гаусс (см., например, [6] и [14]), над этой же самой проблемой он задумался в 1792 г., когда ему было 15 лет.

Интересно также, что и Гаусс, и Лобачевский первоначально пытались доказать этот постулат. Письменных подтверждений такого рода попыток Гаусса не сохранилось, однако известно, что он не мешал искать доказательство V постулата своему другу Фаркашу Бояи (F. Bolyai, 1775–1856). Сын Фаркаша, Янош Бояи (J. Bolyai, 1802–1860), в 1829 г. независимо открывает неевклидову геометрию. Что касается Н. И. Лобачевского, то в архиве Казанского университета сохранились записи его лекций 1816/17 учебного года, сделанные студентами [6, 9], с “доказательством” V постулата. В частности, там есть доказательство леммы, полученной в феврале 1817 г., в которой утверждалось: “Если сумма  $S$  внутренних углов некоторого плоского треугольника равна  $2d$  (двум прямым), то этот факт справедлив для всех плоских треугольников и, более того, справедлив V постулат Евклида”. Лежандр (A. M. Legendre, 1752–1833) получил этот результат лишь 10 лет спустя [6].

Через короткое время Бартельс обращает внимание на необычайные способности Николая Лобачевского и талант Ивана Симонова<sup>12</sup>. Более того, в течение 1811–1813 гг. Бартельс еженедельно занимается дополнительно с Лобачевским и Симоновым по 4 часа “по четвергам и субботам”, приготавливая их к должности адъюнкта [9, с. 48].

Здесь уместно сказать, что научные интересы молодого Лобачевского были близки научным интересам Бартельса: оба интересовались астрономией, геометрией, анализом, итерационными алгоритмами, теорией чисел, механикой [15, 16]. Их сближало также и то, что каждый из них построил научную карьеру прежде всего своим трудом и талантом, которые были вовремя замечены и оценены [17]. Так, уже при получении степени магистра Лобачевский был специально выделен мнениями профессоров Бартельса, Иосифа

<sup>12</sup> Симонов Иван Михайлович (1794–1855) — студент, магистр, адъюнкт, профессор (астрономии), ректор (с 1847 по 1855 г.) Казанского университета, сменивший на этом посту Лобачевского, который был ректором в 1827–1846 гг., первый русский астроном — участник кругосветного путешествия в 1819–1821 гг. (на шлюпах “Восток” и “Мирный”).

фон Литтрова (J. J. Littrow, 1781–1840)<sup>13</sup>, Мартина Германа<sup>14</sup> и Франца Броннера<sup>15</sup> [10]: “... Николай Лобачевский — одобряемый по знаниям своим ... и потому, что студент сей оказал чрезвычайные успехи при таковых же дарованиях в науках математических и физических” [9, с. 42].

Этим успехам способствовала также свобода изложения материала. Так, например, в письме Чшокке от 23 июля 1809 г. [4] Бартельс пишет: “... имею возможность говорить им [студентам] о таких вещах, о которых не имел бы права говорить ни в одном немецком университете”.

Успехам преподавательской деятельности Бартельса в Казани способствовала и возможность применения на практике методов швейцарского педагога Иоганна Г. Песталоцци (J. H. Pestalozzi, 1746–1827), в чьем институте в Бурдорфском замке он даже побывал во время работы в Аарау [4].

К сожалению, через 10 лет ситуация изменится и Бартельс будет искать возможность покинуть Казань. Важной причиной поиска нового места работы, кроме усиления казарменных порядков в университете, было желание уделить большее внимание собственной научной работе, поскольку загруженность чтением лекций оставляла на это всё меньше времени.

Узнав о появившейся вакансии в Дерптском университете (с существенно меньшим объемом преподавательской работы), Бартельс предпринимает усилия по занятию этой должности. При этом он мотивирует свой переезд тем, что миссия создания университетского центра в Казани увенчалась успехом, а он со своей стороны хотел бы подвести итоги своей научной деятельности, поскольку ему уже минуло 50 лет, и сделать это будет удобнее в Дерпте.

22 ноября 1820 г. ректор Казанского университета Григорий Борисович Никольский (1785–1844) поручает Н. И. Лобачевскому “... преподавание чистой математики вместо профессора М. Ф.<sup>16</sup> Бартельса” [9, с. 64]. Так заканчивается казанский период жизни Бартельса.

После переезда Бартельса в Дерпт в начале 1821 г. он в течение года подготавливает для издания работу “Исследования в четырех частях...” [11], вышедшую в 1822 г. Эта работа насчитывает 65 страниц и действительно состоит из четырех частей. Две первые из них касаются обратных тригонометрических функций, а также гиперболических, логарифмических и тригонометрических функций.

<sup>13</sup> И. Литтров был профессором астрономии и основателем обсерватории Казанского университета в 1810–1816 гг., позже (с 1819 г.) — директором Венской обсерватории. Под его руководством защитили диссертации будущие профессора Николай Брашман (1796–1866) и Иван Симонов.

<sup>14</sup> М. Герман (M. G. Hegman, 1754–1822) был профессором (с 1805 по 1819 гг.) латинского языка Казанского университета. Получил известность своими трудами по греческой мифологии.

<sup>15</sup> Броннер в 1804 г. преподавал математику в кантональной школе Аарау, благодаря Бартельсу в 1810 г. был приглашен Румовским в Казань, где получил кафедру физики в Казанском университете. Покинул Казань в 1817 г., известен как поэт не менее, чем как ученый.

<sup>16</sup> В выданных Бартельсу русских документах его называли Мартин Фёдорович Бартельс.

Лично для меня эта часть работы Бартельса особенно интересна в связи с его подходом к элементарным функциям, а именно в связи с его попытками получения этих функций из функций вида  $1/(a_n - x)$ ,  $1 + b_n x^2$ , где  $a_n$ ,  $b_n$  — вещественные числа,  $n = 1, 2, \dots$ , с помощью сумм и произведений без применения интегрального исчисления. Например, на стр. 16 (§17) приводится

**Теорема.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \{1 + 4x^2/\pi^2(2k-1)\} = (e^x + e^{-x})/2.$$

(В книге [18] те же самые цели реализуются с помощью интегрирования, но без использования бесконечных произведений.)

В третьей и четвертой частях книги [11] рассматриваются теоремы, касающиеся полиномов, преобразований кривых, кривизн кривых и поверхностей, касательных. Если в первых трех частях содержались результаты Бартельса, которые он отослал Н. Фуссу еще в 1804 г., то четвертая часть была началом трех следующих работ Бартельса по дифференциальной геометрии и содержала необходимый материал для открытия формул Френе (F. J. Frenét, 1816–1900)<sup>17</sup> или формул Серре<sup>18</sup> – Френе.

В 1825 г. Бартельс посылает Н. Фуссу работу на французском языке “Краткий обзор фундаментальных формул трехмерной геометрии” [19]. В письме Фуссу от 31 октября 1825 г. [20] Бартельс сообщает, что заканчивает еще две работы: “Sur la parallaxe de Soleil”<sup>19</sup> и “Memoire sur les axes principaux de corps solide”<sup>20</sup>. В том же году Фусс представляет эти три работы Бартельса на собрании Петербургской академии наук. На основании оценки этих трудов четырьмя независимыми действительными членами Академии Бартельса избирают членом-корреспондентом Академии наук.

Работа [19] была опубликована в 1831 г. Что касается двух других работ Бартельса, то они не опубликованы и остались в архиве Петербургской академии наук. Как указывали рецензенты, первая из них имела результаты, подобные результатам одной из статей Жака Бине (J. P. M. Binet, 1786–1856), а результаты второй перекрывались мемуаром<sup>21</sup> того же Бине, опубликованным в 1813 г. в “Journal de l’Ecole polytechnique”.

Бартельсу оставалось только пожалеть, что осенью 1811 г., когда он начал заниматься с магистрами Лобачевским и Симоновым разбором 1-го тома “Небесной механики” Лапласа [9, с. 48] и получил основные результаты этих двух не принятых к публикации в 1826 г. Академией наук работ, в Казани еще не было научного журнала. Такой журнал — “Казанский Вестник” — появится там только в 1829 г.

<sup>17</sup> Фредерик Жан Френе нашел свои формулы еще в 1847 г., но опубликовал их в 1852 г.

<sup>18</sup> Жозеф Альфред Серре (J. A. Serret, 1819–1885) установил формулы, связывающие направляющие косинусы касательной, нормали и бинормали, в 1851 г.

<sup>19</sup> “О параллаксе Солнца” т. е. об угле с вершиной, удаленной от центра Земли на среднее расстояние от Земли до Солнца, и со сторонами, направленными: одна к центру Земли, а другая касательно к земному сфероиду в точке его экватора. Для параллакса Солнца (П.С.) принято в 1896 г. значение, равное 8,80”.

<sup>20</sup> “Mémoire sur la theorie des axes conjugués et des moments d’inertie des corps”.

<sup>21</sup> “Мемуар о главных осях твердого тела”.

В Дерпте Бартельс начинает вести интенсивную переписку с европейскими учеными, прежде всего с Гауссом, чтобы наверстать свою невольную оторванность за время работы в Казани от новых результатов коллег. В Дерпте же Бартельс сближается с Фридрихом Струве, ставшим в 1820 г. ординарным профессором астрономии и директором обсерватории университета. Струве был знаком с Гауссом с 1814 г., когда в первый раз был командирован в Гёттинген и проводил наблюдения под его руководством. С той поры они регулярно переписывались.

Любопытно, что руководство вновь открытого в 1802 г. университета в Дерпте дважды пыталось пригласить Гаусса занять кафедру астрономии и математики, но безрезультатно [20, 21].

Бартельс, знакомясь с результатами Гаусса 1827 года по внутренней геометрии, тотчас вводит их в свои лекции для студентов, обогащая эти лекции и своими результатами.

Здесь уместно сказать, что с годами у Бартельса появилась потребность в ученике, который смог бы быть не только помощником, но и продолжателем его идей. Среди студентов Бартельс обращает внимание на двух сыновей профессора рисования (единственного в университетах России) Карла Августа Зенффа (K. A. Senff, 1770–1838): старшего, Карла Юлиуса (1804–1832), и младшего, Карла Эдуарда (1810–1850).

Карл Юлиус Зенфф в 1827 г. представляет в Дерпте работу на немецком языке “Систематическое представление основных теорем геометрии в пространстве”<sup>22</sup> (опубликована в 1829 г.), за которую его удостоивают серебряной медали. Во введении автор пишет: “Предложения, которые можно найти здесь, почти все содержатся в работе Коши “Leçons sur les applications de calcul infinitesimal a la geometrie” . . . [которая] вышла лишь в 1826 г. в Париже, в то время как профессор Бартельс излагает геометрию в этой форме уже несколько лет. Основные предложения этой геометрии в пространстве я дал полностью так, как их читал профессор Бартельс своим ученикам” [14, с. 49]. Разумеется, работа содержала и оригинальные результаты самого автора<sup>23</sup>.

В 1827 г. в университет поступает Карл Эдуард Зенфф. Именно на него Бартельс возлагает особые надежды [14, 22]. Уже в 1830 г. К. Э. Зенфф представляет работу [23], за которую получает золотую медаль. Эта работа была опубликована в 1831 г. одновременно с работой [19] самого Бартельса. В предисловии к этой работе автор пишет, что параграфы 1, 2, 3 главы IV, а также §5 главы V являются конспектами лекций Бартельса. Именно в §5 в ковариантной форме через скалярные произведения дано представление так называемых формул Френе. При этом вся подготовительная часть содержалась в работе [19]. Иными словами, *формулы Френе были открыты Бартельсом по крайней мере за 16 лет до докторской диссертации Френе (1847 г.)*, где они, согласно официальной версии, встречаются в первый раз.

<sup>22</sup> “Systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Räume”, Dorpat. 1829, 77 s.

<sup>23</sup> К сожалению, Карл Юлиус Зенфф рано умирает во время поездки в Италию.

Чтобы понять суть дела, напомним, что если  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$  — кривая  $L$  в  $\mathbf{R}^3$ , где  $s$  — параметр, то формулы

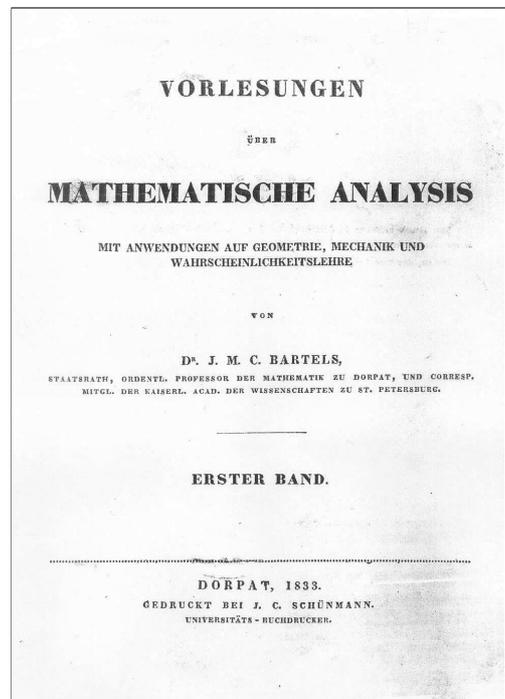
$$\dot{\vec{t}} = k_1 \vec{n}, \quad \dot{\vec{n}}_s = -k_1 \vec{t} - k_2 \vec{b}, \quad \dot{\vec{b}}_s = k_2 \vec{n},$$

где  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  — касательный вектор, нормаль и бинормаль соответственно,  $k_1$  — кривизна, а  $k_2$  — кручение, являются формулами Френе в контравариантной форме. Бартельс получает тот же результат с помощью скалярного произведения в ковариантной форме:

$$(\vec{b}, \dot{\vec{n}}_s) = -(\vec{n}, \dot{\vec{b}}_s) = -k_2, \quad -(\vec{n}, \dot{\vec{t}}_s) = (\vec{t}, \dot{\vec{n}}_s) = -k_1, \quad (\vec{t}, \dot{\vec{b}}_s) = -(\dot{\vec{b}}_s, \vec{t}) = 0.$$

На мой взгляд, подход Бартельса более современный<sup>24</sup>, чем классические подходы Френе и Серре [24].

В 1829 г. Бартельс обращается в Министерство просвещения Российской империи с предложением издать учебник по математическому анализу с приложениями к геометрии, механике и теории вероятностей, на немецком языке в трех томах. Министерство дало согласие, и в 1833 г. вышел первый том. Этот том имел 4 части. Часть I содержала теорию отношений, пропорции, логарифмические функции и им обратные; часть II — разложение логарифмических функций в ряды; часть III — плоскую и сферическую тригонометрию; часть IV — аналитическую геометрию. В книге много методических находок самого Бартельса, мгновенно оцененных в Европе, прежде всего в Германии.



<sup>24</sup> На это обратил внимание еще в начале 70-х годов XX века Ю. Лумисте (Ülo Lumiste) [14].

Книга Бартельса вызвала, однако, живой интерес не только у специалистов: по представлению министра просвещения царь Николай I дарит Бартельсу кольцо с бриллиантом. Впрочем, это не компенсировало огромных (свыше полутора тысяч рублей) затрат самого Бартельса на издание книги. Только распоряжение министра просвещения о закупке каждой гимназией одного экземпляра книги вернуло Бартельсу затраченные деньги, да и то не сразу. И хотя Бартельс обещает подготовить оставшиеся два тома к 1835 году, энтузиазма у него всё меньше — сказывается возраст и пошатнувшееся здоровье.

Содержание предполагавшегося второго тома хорошо известно. Он должен был насчитывать 30 авторских листов и содержать 79 параграфов. При этом в нем должны были найти место как классические результаты — теория пределов, включая замечательные пределы, разложение Валлиса для числа  $\pi$ , разложения функций в ряд Тейлора, коэффициенты Бернулли, суммирование рядов, так и результаты Пфаффа и Гаусса по применению итерационных алгоритмов к исследованию гиперболических функций [25].

Лично меня заинтересовало доказательство теоремы Пфаффа о пределах последовательностей  $\{p_n\}$  и  $\{q_n\}$ , где

$$p_n = (p_{n-1} + q_{n-1})/2, \quad q_n = \sqrt{p_n q_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

подобных тем, которые исследовал Гаусс, но отличных от них (у Гаусса  $q_n = \sqrt{p_{n-1} q_{n-1}}$ ). Бартельс изучает скорость сходимости этих последовательностей. Эти идеи нашли свое применение только в последние два десятилетия XX века при изучении быстрых алгоритмов [26, 27].

В третьем томе предполагалось дать приложения математического анализа (включая и интегральное исчисление) к геометрии, механике и теории вероятностей.

К сожалению, эти планы не удалось реализовать. В декабре 1836 г. Иоганн Бартельс умирает. Его тесть Фридрих Георг Струве вместо 60 издательских листов (двух оставшихся томов) находит лишь три листа (65 страниц), относящихся ко второму тому, правда, с оглавлением всего тома. Эти листы он издает со своим предисловием [28].

Карл Эдуард Зенфф становится преемником Бартельса и в 1837 г. получает должность ординарного профессора в Дерптском университете.

Идеи Бартельса в области анализа и дифференциальной геометрии находят распространение в России, поскольку в 20-х годах XIX века математики из России для “приготовления к профессорскому званию” посылались в Дерптский университет. С другой стороны, оказались забытыми его результаты в теории чисел [16], комбинаторном анализе [29] и механике [1, ч. IV].

Теперь уместно сказать несколько слов по поводу отношений Бартельса и Гаусса. Гаусс, высоко ценя ум и математический талант Бартельса (о чем неоднократно пишет Сарториус [2]), по поводу своих исканий по неевклидо-

вой геометрии общался только с астрономами. Он надеялся, что определив сумму внутренних углов треугольника, две вершины которого находятся на Земле, а третья является звездой, он получит подтверждение того, что эта сумма не равна двум прямым углам. Однако этот опыт упирался в проблемы погрешности наблюдений, которые Гаусс преодолеть не мог, и другие астрономы тоже помочь не могли [30].

Об этих исканиях Гаусса Бартельс ничего не знал, и тем более не мог о них сообщить Лобачевскому.

Часть историков математики, признавая первенство в открытии формул Френе за Бартельсом, выдвигает гипотезу, что, желая помочь Бартельсу стать членом-корреспондентом Петербургской академии наук, Гаусс якобы сообщил Бартельсу об этих формулах. Но ни в дневнике Гаусса, ни в его письмах нет и намека на эти результаты.

Резюмируя всё, что мы знаем о Бартельсе, можно сказать, что и Гаусс, и Лобачевский, и Карл Эдуард Зенфф относились к нему как к старшему и мудрому другу с широчайшим математическим горизонтом и знаниями. Со своей стороны, Бартельс гордился их успехами, и это они ценили.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bartels J. M. Vorlesungen über mathematische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Warscheinlichkeitslehre, t. 1. Dorpat, 1833. 336 s.
2. Sartorius von Waltershausen W. Gauss zum Gedächtnis. Leipzig, 1856.
3. Briefe von Bartels an Gauss. Niedersächsische Staats und Universitäts Bibliothek Göttingen, Gauss-Archiv, 1976.
4. Briefe von Bartels an Zschokke. Staatsarchiv Aarau (Kanton Aargau), Nachlags Heinrich Zschokke, 1975.
5. Bartels J. M. Bailly's Geschichte der neuern Astronomie, t. 1 und 2. Leipzig, 1796–1797.
6. Бирман К. Р. О первых научных работах М. Ф. Бартельса. Вопросы истории естествознания. — М., 1974. С. 119–122.
7. Neue Deutsche Biographie, t. 1. — Berlin: Duncker & Humboldt, 1953.
8. Русский биографический словарь, т. III. — С.-Петербург, 1900.
9. Новые материалы к биографии Н. И. Лобачевского / Сост. Б. Л. Федоренко. Научное наследство, т. 12. — Л.: Наука, 1988. 384 с.
10. Radspieler H., Franz Xaver Bronner. Aarganische Bibliographien und Repertationen, I. Aarau, 1964.
11. Bartels J. M. Disquisitiones quatuor ad theoriam functionum analiticarum pertinentes. — Dorpat, 1822.
12. Biermann K. R. Übersiedlung eines deutschen Mathematikers von Braunschweig nach Kazan im Jahre 1807/08. Zur Biographie von M. Bartels, des Lehrers von Gauss und Lobacevskij // Histor. Math. 1974. V. 1. S. 65–77.
13. Montucla J. E. Historie des mathematiques, t. 1–4. — Paris, 1802.

14. Лумисте Ю. Г. Бартельс-исследователь и его достижения по аналитическим методам геометрии // В сб.: Памяти Лобачевского посвящается. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1992. С. 41–60.
15. Лаптев Б. Л. Бартельс и формирование геометрических идей Лобачевского // В сб.: Памяти Лобачевского посвящается. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1992. С. 35–40.
16. Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России. — Л.: Наука, 1973. 360 с.
17. Гудков Д. А. Н. И. Лобачевский. Загадки биографии. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1992. 241 с.
18. Одинец В. П., Поволоцкий А. И. Построение элементарных функций. — СПб.: Образование, 1995. 70 с.
19. Bartels J. M. Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géométrie à trois dimensions; Mémoires présentés pour divers savants à L'Académie de sciences de St.-Petersburg le 14. Dec. 1825. — St.-Petersburg, 1831. Т. 1. S. 77–96.
20. Alt-Dorpat. Briefe aus den ersten Jahreszenten der Hochschule. Herausgegeben von W. Stieda. — Leipzig, 1926.
21. Мюресепп П. В. К. Ф. Гаусс и Тартуский университет // В сб.: Роль Тартуского университета в развитии отечественной науки и подготовки научно-педагогических кадров. — Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1977. С. 46–50.
22. Морозова Я. Н. Из истории преподавания математики в Дерптском университете // Уч. запис. Московского обл. пед. ин-та. 1963. Т. 123, вып. 3. С. 87–92.
23. Senff C. E. Theoremata principaliae e Theoria curvarum et superficierum. — Dorpat, 1831.
24. Одинец В. П., Якубсон М. Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. 152 с.
25. Венгер М. И. Исследования по теории итерационных алгоритмов в Тартуском университете // В сб.: Роль Тартуского университета в развитии отечественной науки и подготовки научно-педагогических кадров. — Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1977. С. 50–53.
26. Borwein J. M., Borwein P. B. The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary function // SIAM Rev. 1984. V. 26, № 3. P. 351–356.
27. Дмитриева О. М., Малозёмов В. Н. Об одном быстром алгоритме, основанном на арифметико-геометрических средних // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т. 37, № 3. С. 277–290.
28. Bartels J. M. Vorlesungen über mathematische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Warscheinlichkeitslehre (Herausgegeben von F. G. W. Struve). — Dorpat, 1837. 65 s.
29. Ожигова Е. П. Вопросы комбинаторного анализа и символического исчисления в трудах прибалтийских ученых начала XIX века // В сб.: Роль Тартуского университета в развитии отечественной науки и подготовки научно-педагогических кадров. — Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1977. С. 42–46.
30. Bühler W. K. Gauss. A biographical study. — Berlin–New York, 1981. (Русск. перев.: Бюлер В. Гаусс. Биографическое исследование. — М.: Наука, 1989. 208 с.)

**JOHANN M. C. BARTELS WAS NOT ONLY A PRECEPTOR  
OF GAUSS AND LOBACHEVSKII**  
(to the 240 anniversary of the J. M. C. Bartels birthday)

*W. P. Odyniec*

The article is devoted to the life and the work of Johann M. C. Bartels. Some achievements of Bartels which essentially forestalled the related results by Binet, Cauchy and Frénet are presented.

*Keywords:* J. M. C. Bartels, the biography, the Frénet's formulas.