ФИЛОСОФИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 510.21 + 517.1

О МАТЕМАТИКЕ

Л. Д. Кудрявцев

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Россия, 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8;
e-mail: kudryav@mi.ras.ru

Предприняты попытки дать описание математики как науки и проанализировать некоторые трудности, возникающие в процессе её развития. Приведены примеры, показывающие, что весьма далекие друг от друга логические понятия удивительным образом оказываются тесно связанными между собой и что основной интерес в математике представляет изучение логических связей между объектами математических структур.

Ключевые слова: математика, математическая структура, логические понятия, информационное поле.

В предлагаемой статье делается попытка дать описание математики как науки, а также анализируются некоторые трудности, возникающие в процессе её развития.

Прежде всего, встает вопрос о том, что такое математика? В советский период в России было принято определение Ф. Энгельса, в котором говорилось, что математика изучает пространственные формы и количественные соотношения реального мира. Однако это является не определением математики как науки, а лишь указанием на одно из её приложений. Еще Галилей говорил, что Вселенная — это книга, написанная на математическом языке. Поэтому существует мнение, что математика — это язык для описания реальных явлений, причем не только физических, химических и биологических, происходящих в материальном мире, но и социальных, протекающих в человеческом обществе. Однако функцией описания явлений далеко не исчерпывается сущность математики. Математическое описание реальных явлений или, как говорят, их математическое моделирование дает возможность не только описывать, но и изучать эти явления, в частности предсказывать их дальнейшее развитие. Таким образом, математика является одним из важнейших методов изучения (а не только описания) реальных процессов, протекающих в окружающем нас мире. Но и это еще не ответ на вопрос, что такое математика. Математические модели не тождественны реальным явлениям, которые они описывают. Так что же представляют собой эти модели?

Говорят, что математика — абстрактная наука. Это, в частности, означает, что для математической модели несущественна конкретная реализация её элементов. Так, например, одна и та же формула

$$F = k\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

описывает как гравитационное взаимодействие масс (закон всемирного тяготения Ньютона), так и взаимодействие электрических зарядов и магнитных масс (законы Кулона).

Важно подчеркнуть, что с помощью математического моделирования можно изучать разнообразные явления, в частности прогнозировать их развитие, и в том случае, когда это невозможно делать с помощью постановки опытов. Это относится как к физическим, так и к социальным явлениям.

Вернемся снова к сущности математики. Что же является предметом её изучения? Математика изучает определенного рода логические понятия и отношения между ними. Для этих понятий даются логические определения и постулируются их связи. Определяются, например, теоретико-множественные, топологические, метрические, геометрические, аналитические, алгебраические и вероятностные структуры, которые и представляют собой предмет, изучаемый математикой. Конкретные определения этих структур даются в математической литературе.

Математические структуры представляют собой часть информационного поля, которое существует наряду с материальным (физическим) полем. Информационное поле состоит из реально существующих абстрактных фактов. Так, например, в то время когда человечество еще не додумалось до теоремы Пифагора, она уже существовала в информационном поле как его реальный элемент, позже открытый людьми.

Информационное поле содержит в себе разнообразные логические (не только математические) структуры, все сведения о материальном (физическом) мире, о законах его развития, взаимодействии его частей, о его прошлом и будущем.

Всё это говорит о большой роли информационного поля. Не случайно Евангелие от Иоанна начинается так: “В начале было Слово”, а что такое “Слово”, как не информация? Значимость понятия “Слово” разъясняется во второй части фразы: “В начале было Слово, и Слово было у Бога, и Слово было Бог”.

Заметим, что информационное поле, о котором идет речь в настоящей статье, понимается не в божественном смысле, а как часть реального мира, неотъемлемо сопутствующая его материальной части. Конечно, всё сказанное здесь об информационном поле является лишь некоторым внешним его описанием. Что же касается изучения его сущности, анализа взаимодействия информационного поля и окружающего нас мира и механизма этого взаимодействия, то это предстоит сделать человечеству в будущем.

Вернемся к математическим структурам. Иногда оказывается, что весьма далекие друг от друга логические понятия неожиданным и удивительным образом являются тесно связанными между собой. Пример такой ситуации дает знаменитая формула

$$e^{\pi i} = -1,$$

открытая Леонардом Эйлером, связывающая четыре числа: действительные — -1, π, e — и комплексное число i. Число -1 является отрицательным целым. Пополнение натуральных чисел отрицательными целыми числами и нулем дает возможность определить вычитание для любых натуральных чисел. Кроме того, вообще отрицательные действительные числа целесообразны в приложениях при измерении физических величин, например температуры, которая может быть выше или ниже температуры замерзания воды; высоты расположения участков суши — на Земле они могут быть выше и ниже уровня моря. Число π связано с геометрией — оно равно отношению длины окружности к её диаметру. Число e характеризуется тем, что показательная функция с основанием e совпадает со своей производной, причем основание показательной функции с таким свойством единственное. Наконец, число i является комплексным числом, которое возникло при решении алгебраических уравнений. И вот эти четыре столь далеких друг от друга числа оказываются связанными замечательной формулой Эйлера. Эта формула является своеобразным математическим чудом. Не случайно она высечена на огромном камне фронтона главного здания университета Королевы в городе Кингстон, бывшем ранее столицей Канады.

Отметим еще функцию Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

которая применяется в теории вероятностей при исследовании как непрерывных, так и дискретных величин. В этой формуле снова присутствует число π. Казалось бы, какая связь может быть между задачами теории вероятностей и отношением длины окружности к её диаметру?! Всё это не может не вызывать восхищения стройностью, глубиной и непредсказуемостью математических связей.

Математические формулы содержат в себе много скрытой информации. Не случайно говорят, что формулы умнее нас. Это действительно так. Нередко математик, правильно применяя формулы при исследовании какого-либо вопроса, неожиданно для себя приходит к результатам гораздо более сильным, чем он предполагал, более того, получает результаты, о которых раньше даже не думал.

Отметим также, что разные по своей структуре математические понятия бывают связаны одними и теми же логическими отношениями. Поэтому основной интерес в математике представляет изучение логических связей между рассматриваемыми объектами математических структур, а не только сами эти объекты. Поясним сказанное на двух примерах.

Сначала рассмотрим определение действительного числа. Прежде всего, определяется множество натуральных чисел как упорядоченное множество, имеющее первый элемент, который называется единицей и обозначается 1. Постулируется, что в этом множестве определены операции сложения и умножения его элементов, обладающие свойством коммутативности и ассоциативности, а также дистрибутивности операции умножения относительно операции сложения. Предполагается еще, что вместе с каждым элементом n множества натуральных чисел элемент $n + 1$ также принадлежит этому множеству и каждый элемент множества натуральных чисел может быть получен из единицы последовательным прибавлением к ней конечного числа единиц.

Во множестве натуральных чисел операции, обратные к операциям сложения и умножения, т. е. операции вычитания и деления, определены не для любых пар натуральных чисел. Однако при расширении множества натуральных чисел до множества целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, как это было отмечено выше, операция вычитания становится определенной уже для любых целых чисел, а при расширении множества целых чисел до множества рациональных чисел $Q = \left\{0, \pm\frac{p}{q},\ p, q \in N\right\}$ операция деления определена для любых пар рациональных чисел, кроме деления на ноль. Доказывается, что каждое рациональное число можно записать в виде периодической десятичной дроби. С помощью рациональных чисел можно определить действительные числа, причем разными способами.

Первый способ (Вейерштрасс): действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одних девяток.

Второй способ (Коши): действительным числом называется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Третий способ (Дедекинд): действительным числом называется сечение множества рациональных чисел.

Во всех трех случаях упорядоченность, а также операции сложения и умножения переносятся с множества рациональных чисел на множество всех действительных чисел с сохранением свойств этих операций. В результате получаются множества, изоморфные относительно порядка и указанных операций. Именно в этом смысле неважно, что собой конкретно представляет действительное число: бесконечную десятичную дробь, класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел или сечение рациональных чисел, а существенны лишь связи, которые существуют между ними.

В качестве второго примера рассмотрим прямую на плоскости. Прямая может быть определена, например, с помощью аксиом евклидовой геометрии. Напомним некоторые из них: через любые две точки плоскости можно провести прямую; две разные прямые либо пересекаются в одной точке, либо не имеют общих точек; на плоскости через любую точку, лежащую вне данной прямой, можно провести единственную прямую, не пересекающуюся с данной, т. е. ей параллельную.

Если ввести на плоскости декартовы координаты x, y, то прямая является множеством точек (x, y), координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

где A, B и C — некоторые заданные постоянные, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь на плоскости всевозможные окружности и прямые, проходящие через некоторую фиксированную точку, например начало координат. Удалим из указанных окружностей эту точку и будем называть их проколотыми окружностями. Из указанных прямых также удалим ту же точку, но дополним их бесконечно удаленной точкой и будем называть такие множества проколотыми окружностями бесконечного радиуса.

Рассматриваемые окружности конечного радиуса описываются уравнениями вида:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2, \tag{2}$$

где a и b — некоторые постоянные, $a^2+b^2>0$. Проколотые окружности (конечного и бесконечного радиусов) удовлетворяют тем же аксиомам, что и обычные прямые вида (1). Например, через любые две точки плоскости можно провести, и притом единственную, проколотую окружность конечного или бесконечного радиусов.

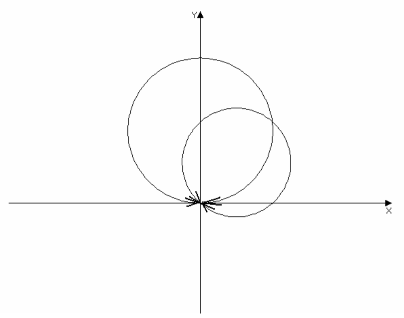

Рис. 1

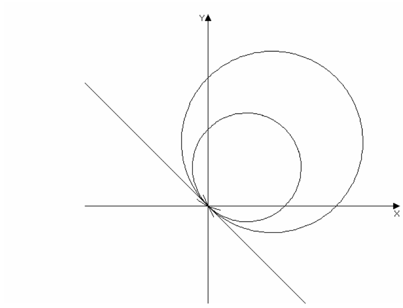

Рис. 2

Любые две различные проколотые окружности либо не пересекаются (если в начале координат у них общая касательная), либо пересекаются в одной точке (рис. 1 и 2).

Наконец, через любую точку, лежащую вне заданной проколотой окружности, можно провести единственную проколотую окружность, не пересекающую исходную проколотую окружность (аксиома параллельности, см. рис. 2). Таким образом, непосредственно проверяются аксиомы Евклида для построенных проколотых окружностей конечного или бесконечного радиусов. Поэтому такие проколотые окружности конечного или бесконечного радиусов могут рассматриваться как прямые.

Углом между такими пересекающимися “прямыми” называется угол между касательными к окружностям в точке их пересечения.

Для полноты надо, конечно, ввести понятие расстояния между точками (x_1, y_1) и (x_1, y_2) плоскости с такими “прямыми”.

Для этого рассмотрим отображение $z=\dfrac{1}{w}$ плоскости комплексного переменного $w=u+iv$ на плоскость комплексного переменного $z=x+iy$. При таком отображении бесконечно удаленная точка плоскости переменного w отображается в начало координат плоскости переменного z, а обычные прямые $Au+Bv+C=0$ переходят в проколотые в начале координат окружности конечного или бесконечного радиусов.

Отсюда, в частности, еще раз следует выполнение аксиом евклидовой геометрии для “прямых”, представляющих собой проколотые окружности.

Расстояние $\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \overset{\text{def}}{=} \left|\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}\right|$, где $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то есть если $w_1=\dfrac{1}{z_1}$, $w_2=\dfrac{1}{z_2}$, то $\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\rho(z_1,z_2)=|w_1-w_2|$ — обычное расстояние.

Отметим еще, что в силу конформности отображения $z = \dfrac{1}{w}$ сохраняется величина углов между кривыми.

Я всегда рассказывал студентам этот пример, когда знакомил их с аксиоматическим методом, добавляя при этом, что для плоскости с прямыми, понимаемыми как выше описанные проколотые окружности, справедлива вся планиметрия, которую они изучали в средней школе. В этом случае имеет место, в частности, и теорема Пифагора и её не надо доказывать, так как она уже доказана в школьном курсе на основе только аксиом евклидовой геометрии. Таким образом, говорил я, вы знаете на самом деле гораздо больше, чем думаете. Это производило впечатление: оказывается, и проколотые окружности могут быть прямыми!

Итак, действительно, рассмотренные примеры показывают, что при изучении математических структур конкретные интерпретации их элементов являются несущественными, а существенны лишь логические связи между этими элементами. Так, например, как было показано, прямые могут изображаться в виде проколотых окружностей — и те и другие удовлетворяют одним и тем же аксиомам евклидовой геометрии.

При этом обыкновенная классическая прямая (1) не может быть целиком нарисованной на плоскости, так как она является неограниченным множеством. Всю же “прямую” (2) можно нарисовать на плоскости, так как проколотая окружность представляет собой ограниченное множество!

Возвращаясь еще раз к вопросу о сущности математики, следует заметить: то обстоятельство, что математика изучает логические понятия, которые удовлетворяют определенным свойствам, формулируемым в виде аксиом, порождает специфические трудности. Они, прежде всего, связаны с возникновением вопроса: существуют ли в действительности определенные нами структуры, не противоречивы ли они? Этот вопрос возникает уже при введении основных понятий. Так, например, до сих пор не решен вопрос о непротиворечивости арифметики. Не ясно, не противоречиво ли понятие “множество действительных чисел”. Дело в том, что из того, что конкретно определяются какие-то элементы, наделенные заданными свойствами, не следует, что можно рассматривать совокупность всех таких элементов. Например, определяется понятие кардинального числа как мощности некоторого множества. Однако понятие множества всех кардинальных чисел противоречиво, так как какое бы множество кардинальных чисел ни взять, всегда можно указать кардинальное число, которое не принадлежит этому множеству.

Математические истины точно формулируются и логически обосновываются. Однако это только внешняя сторона математики, подобно тому, как нотная запись является формальной записью музыкальных произведений. Было бы заблуждением думать, что, занимаясь математикой или её приложениями, можно достичь существенных успехов лишь на основе логических рассуждений. Если нет готовых разработанных алгоритмов для решения поставленного вопроса, то для его изучения, как правило, недостаточно одной логики. При решении математической задачи выбор правильного направления логических рассуждений происходит на основе интуиции, чувства гармонии и фантазии. И здесь возникают свои сложности: бывает, что интуиция нас подводит. Приведем простой пример. Пусть вокруг Земли и вокруг теннисного мяча обмотаны нити по их экваторам. Увеличим длины каждой из этих нитей на 1 метр и снова расположим их по окружностям с центрами в центрах мяча и Земли. Теперь спросим себя, какой из получившихся зазоров будет больше? Интуиция подсказывает, что у теннисного шарика зазор будет больше, так как на Земле зазор вообще не будет заметен. Однако если взять окружность данной длины $c = 2\pi R$ и увеличить её длину на 1, то радиус новой окружности будет равен

$$\frac{c+1}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = R + \frac{1}{2\pi}\,,$$

то есть "зазор" равен $\dfrac{1}{2\pi}$ и, тем самым, не зависит от радиуса, а следовательно, и от длины окружности! Невероятно, но факт.

Я не встречал в жизни ни одного человека, который бы интуитивно чувствовал правильный ответ в этой задаче. Один неплохой инженер, когда я сообщил ему правильный ответ, простодушно сказал мне: "Этого не может быть. Здесь ваша математика врет". Такое категорическое суждение инженера вполне понятно. Например, с точки зрения инженера-строителя всякая деталь может оказать влияние на целую конструкцию лишь в случае, когда размеры этой детали соизмеримы в каком-то смысле с размерами всей конструкции. Ситуация же, при которой деталь данного размера оказывает одинаковое влияние как на сколь угодно малую, так и на сколь угодно большую по размерам конструкцию, представляется невероятной, противоречащей "здравому смыслу". Этот пример наглядно показывает, как важно развивать математическую интуицию.

Для развития математической интуиции, несомненно, является полезным решение так называемых "поисковых задач", т. е. таких задач, в которых не требуется вычислить или доказать что-либо определенное. Учащийся, как правило, должен самостоятельно отыскать правильное утверждение и доказать его. Формулировки поисковых задач чаще всего заканчиваются вопросом: "Верно ли такое-то утверждение?", не указывая априори на возможный ответ. К сожалению, в задачниках по математике для средней и высшей школы таких задач мало. Чтобы учить решать подобные задачи, целесообразно начинать с довольно простых вопросов, например: "Будет ли каждый вектор системы линейно независимых векторов выражаться в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы?". Но затем переходить к всё более сложным.

В качестве примеров поисковых задач в математическом анализе приведем следующие:

• будет ли произведение бесконечного числа бесконечно малых бесконечно малой? (для последовательностей и функций);

• будут ли равносходящимися два числовых ряда с асимптотически равными членами при стремлении номеров этих членов к бесконечности? (т. е. будут ли они одновременно сходиться и расходиться). А также аналогичная задача для функций: будут ли несобственные интегралы от эквивалентных функций при стремлении аргумента к их особой точке равносходящимися?

Математика — это абстрактная и логически строгая наука. В этом её сила, но в этом заключается и трудность её изложения и изучения. Бывает совсем не просто дать четкое и ясное определение и еще труднее провести до конца логически строгое заключение. Поясню это на примере решения 21-й проблемы Гильберта. Она была "положительно решена" еще в начале XX века математиком Е. Племелем. Но через 70 лет русский математик А. А. Болибрух, в то время доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института, обнаружил в доказательстве Племеля ошибку и решил 21-ю проблему Гильберта "наоборот" — оказалось, что эта проблема имеет отрицательное решение.

Бывали и курьезные случаи. Так, в 40-х годах прошлого века один наш отечественный математик обнаружил замечательный класс алгебраических групп, обладающих некоторыми удивительными свойствами. Прошло около 10 лет, и было доказано, что найденный класс групп состоит лишь из одной нулевой группы. Чаще бывает, что ошибочные результаты как в математике, так и в её приложениях случаются за счет нестрогого применения математических методов.

Специфическую особенность, присущую математическим исследованиям, выразительно и с чувством юмора описал знаменитый русский математик Л. С. Понтрягин, сказав, что человек, занимающийся математикой, постоянно испытывает чувство страха: когда он берется за решение задачи, он боится, что ему не удастся это сделать (как это часто и бывает при решении трудных, принципиальных математических задач), а если ему это удалось, он боится, что где-то ошибся и кто-то найдет эту ошибку.

Поэтому при преподавании математики следует обратить особое внимание на развитие у учащихся четкого логического мышления, для чего необходимо, чтобы изложение математики было строго логичным, ясным, понятным и по возможности кратким.

Несмотря на большую проделанную работу по совершенствованию методики преподавания математики, эту деятельность не следует прекращать.

Поясню сказанное на простейших примерах. Напомним два равносильных традиционных определения предела числовой функции $f\colon X \to R$, определенной на некотором множестве X действительных чисел R.

Определение 1^0 (по Гейне). Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in R$ и пишется $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) = a$.

И эквивалентное ему определение.

Определение 1^1 (по Коши). Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, таких, что $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Точка x_0 может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X, на котором определена функция f. Если $x_0 \in X$ и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция f называется непрерывной в точке x_0.

Рассмотрим случай, когда множество X, на котором определена функция f, состоит из одной точки x_0. В этом случае множество таких $x \in X$, для которых выполняется неравенство $x \neq x_0$, пусто. Для элементов пустого множества справедливо любое утверждение: например, верно, что все элементы пустого множества в стельку пьяные, верно и то, что все эти элементы совершенно трезвые. И то и другое верно, так как элементов пустого множества просто нет, и поэтому нельзя построить пример, противоречащий данным утверждениям.

В случае когда множество X состоит из одной точки x_0, для функции f верны следующие утверждения: как в силу определения 1^0, так и в силу определения 1^1, она имеет в качестве предела в точке x_0 любое число a и в то же время не имеет никакого предела в этой точке. А потому такая функция одновременно непрерывна и не является непрерывной в точке x_0. Как отмечено выше, ни одно из этих утверждений нельзя опровергнуть. Скажем прямо, странная получается картина.

Можно подумать, что это особый случай, когда функция f определена только в одной точке. Но это не так.

Вспомним, например, теорему о пределе сложной функции $f\big(g(x)\big)$ в некоторой точке x_0, когда у функций f и g существуют пределы в соответствующих точках. Если функция $y = g(x)$ является постоянной: $g(x) \equiv y_0$, то функция f оказывается определенной только в одной точке y_0. Поэтому, согласно сказанному выше, она в этой точке имеет любой предел и, одновременно, не имеет никакого предела. Поэтому условие в указанной выше теореме о том, что функция f имеет какой-то предел, бессодержательно.

Таким образом, даже в таком простом случае, когда функция g является постоянной, в теореме о существовании предела сложной функции $f\big(g(x)\big)$ требуются какие-то дополнительные пояснения. Это, конечно, не естественно и говорит о недостатке традиционного определения предела функции.

Чтобы избежать трудностей, возникающих при использовании определений 1^0 и 1^1, достаточно в них отбросить условие $x_n \neq x_0$ и, соответственно, $x \neq x_0$, то есть сформулировать следующие определения (запишем их для краткости в символическом виде).

Определение 2^0. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, x_n \to x_0,\ x_n \in X \Rightarrow f(x_n) \to a.$

Определение 2^1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta,\ x \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

Эти определения проще, так как в них отброшено одно из условий по сравнению с традиционными определениями. Поэтому и доказательства теорем с помощью 2^0 и 2^1 также упрощаются.

Конечно, предлагаемое определение предела не равносильно традиционному. Например, для абсолютной величины функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при}\ \ x > 0, \\ 0 & \text{при}\ \ x = 0, \\ -1 & \text{при}\ \ x < 0 \end{cases}$$

предел при $x \to 0$ в смысле определения 1^0, а следовательно, и в смысле равносильного определения 1^1, существует и равен 1, а предел в смысле также равносильных определений 2^0 и 2^1 не существует. Однако предел функции $|\operatorname{sign} x|$, рассматриваемый в смысле определений 2^0 и 2^1 на числовой оси R, проколотой в точке $x = 0$, то есть на множестве $R \setminus \{0\}$, также существует и равен 1.

Таким образом, с помощью определений 2^0 и 2^1, применив их к функции $f\colon X \to R$, $X \subset R$, рассматриваемой на множествах X и $X \setminus \{0\}$, можно, вообще говоря, получить больше информации о поведении функции f в точке x_0, чем используя определения предела 1^0 и 1^1.

Замечу, что определения 2^0 и 2^1 не являются новыми для учебной литературы. Они, например, имеются в учебниках Г. П. Толстова [1] и Д. А. Райкова [2]. К сожалению, эти определения недостаточно используются при преподавании математического анализа, хотя и стали в последнее время чаще применяться (см., например, книгу В. И. Егорова и И. Н. Омельченко [3]).

Заметим, что в задачах о пределе функций в точке x_0 в случае, когда функция задана формулой, "условие $x \neq x_0$" выполняется само собой. Это связано с тем, что в силу формулы, задающей функцию, точка x_0 может оказаться не принадлежащей множеству, на котором определена функция.

Так, например, для пределов $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ функции $\dfrac{\sin x}{x}$ и $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ не определены при $x = 0$. При определении производной $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ функции $y = f(x)$ отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не определено при $\Delta x = 0$. По-видимому, исторически из рассмотрения подобных пределов и возникло в определении предела функции "лишнее условие $x \neq x_0$".

Приведенные определения предела функции могут быть сформулированы и в терминах пределов по фильтрам. Первое (традиционное) определение предела функции в точке x_0 равносильно определению предела по фильтру, состоящему из пересечений всевозможных проколотых в точке x_0 окрестностей с множеством X, на котором задана функция. Второе определение предела равносильно определению предела функции по фильтру, состоящему из пересечений всевозможных окрестностей точки x_0 с множеством X (в случае когда точка x_0 не принадлежит множеству X, этот фильтр совпадает, очевидно, с предыдущим).

Ясно, что, в силу сказанного выше, методически предпочтительнее определение предела функции с помощью фильтров, состоящих из целых (непроколотых) окрестностей точек множеств, на которых задана функция. Действительно, в случае определения предела функции с помощью фильтров проколотых окрестностей всякая функция в каждой изолированной точке множества своего определения одновременно имеет любой предел и не имеет никакого предела, является непрерывной и не является непрерывной в этой точке. Внешне ситуация выглядит довольно странно.

В случае же фильтров, состоящих из непроколотых окрестностей, функция в каждой изолированной точке множества своего определения непрерывна.

Это означает, что в математике понятие дискретности является частным случаем понятия непрерывности.

Второй пример касается определения несобственного интеграла. Обычно, если функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и интегрируема, например, по Риману, на любом отрезке $[a, c]$, $a < c < b$, и существует конечный предел $\lim\limits_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется расходящимся.

При таком подходе остается неясным, что же такое расходящийся несобственный интеграл: ведь говорится лишь, когда он существует, а о том, что он из себя представляет, умалчивается.

Более того, без дополнительных разъяснений непонятной, например, оказывается часто рассматриваемая задача об асимптотике расходящегося интеграла, т. к. асимптотика в курсе математического анализа изучается только для функций, а в приведенном выше определении несобственный интеграл не является функцией.

Всё это подсказывает, что несобственный интеграл целесообразнее определить как некоторую функцию.

Поэтому естественно дать следующее определение.

Если функция f определена на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, c]$, $a < c < b$, то несобственным интегралом называется функция $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a \leq x < b$, и она обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если существует предел $\lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\,dt$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, а указанный предел называется его значением и обозначается тем же символом, что и интеграл, то есть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся. При таком определении в формулировках задач для расходящихся несобственных интегралов не возникает никаких неясностей. Например, понятно, что означает порядок расходимости или асимптотика несобственного интеграла.

Эти примеры показывают, что даже методика преподавания математики нуждается в дальнейшем совершенствовании. И здесь далеко не исчерпаны все возможности.

Более подробное изложение некоторых из затронутых вопросов, а также примеры их практических реализаций можно найти в работах автора, приведенных ниже в списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстов Г. П. Элементы математического анализа. Т. I, II. — М.: Наука, 1974.
2. Райков Д. А. Одномерный математический анализ. — М.: Наука, 1982.
3. Егорова В. И., Омельченко И. Н. Предел функции. — М.: Физматлит, 2007.
4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Физматлит, 2002.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. 5-е изд. — М.: Дрофа, 2003.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. 5-е изд. — М.: Дрофа, 2004.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 3. 5-е изд. — М.: Дрофа, 2006.
8. Кудрявцев Л. Д. Предел функции. Формулы Ньютона – Лейбница и Тейлора. — М.: Физматлит, 2004.
9. Кудрявцев Л. Д. Избранные труды. Т. III. — М.: Физматлит, 2008.

ABOUT THE MATHEMATICS

L. D. Kudryavtsev

The attempts are undertaken to give the description of mathematics as a science and to analyze some difficulties arising in the course of its development. Examples are given which demonstrate that logical concepts seemingly rather far from each other are wonderfully closely connected, and the basic interest in the mathematics represents studying logic interrelations between objects of mathematical structures.

Keywords: mathematics, mathematical structure, logical concepts, information field.