СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.53 + 003.625 + 378.147

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ДЛЯ ИХ ЗНАЧЕНИЙ

С. В. Костин

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 119454, г. Москва, пр. Вернадского, 78; e-mail: kostinsv77@mail.ru

Сформулированы принципы, которыми надо руководствоваться при построении математической символики. Разработана последовательная система обозначений для всех основных многозначных функций комплексной переменной и для значений этих многозначных функций. В предложенной системе обозначений отсутствует явление полисемии, то есть каждый символ имеет одно строго определенное значение. Приведены примеры использования предложенной системы обозначений.

Ключевые слова: ТФКП, многозначная функция, главное значение, математическая символика, полисемия и омонимия.

> Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы один передавал другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он постигнул, и зависимость между всеми частями, которую он открыл. Но так же как мнения могут казаться ложны от того, что разумеют иначе слова, так всякое суждение в математике останавливается, как скоро перестаем понимать под знаком то, что оно собственно представляет.
>
> *Н. И. Лобачевский*

§ 1. ПОЛИСЕМИЯ И ОМОНИМИЯ

Опыт преподавания математики в высших учебных заведениях показывает, что использование четкой и продуманной системы обозначений позволяет существенно повысить быстроту и качество усвоения материала.

Математическая символика, используемая при изложении определенной математической дисциплины, может обладать такими особенностями, как полисемия и омонимия.

Явление полисемии заключается в том, что один и тот же математический знак, символ используется в разных местах для обозначения различных, но в то же время родственных понятий. Скажем, символ AB может обозначать прямую (например, в записи $AB \parallel CD$), отрезок (например, во фразе “AB — средняя линия треугольника MNP”), длину отрезка (например, в записи $AB = 5$), луч (например, во фразе “AB — биссектриса угла

MAN”). Символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ может обозначать определенный интеграл Римана $\Bigl($например, во фразе “интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует”$\Bigr)$, значение определенного интеграла Римана $\Bigl($например, в записи $\displaystyle\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\Bigr)$, несобственный интеграл $\Bigl($например, во фразе “интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится”$\Bigr)$, значение несобственного интеграла $\Bigl($например, в записи $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Bigr)$.

Явление омонимии заключается в том, что для обозначения совершенно различных, не родственных друг другу понятий используются графически совпадающие математические символы. Например, символ $(4,\,6)$ может обозначать числовое множество[1] ($(4,\,6) \subset \mathbb{R}$), упорядоченную пару[2] чисел

[1] В нашей статье слово “число” является синонимом словосочетания “комплексное число”. Если некоторое число принадлежит более узкому множеству, чем множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ (например, множеству действительных чисел $\mathbb{R}$ или множеству целых чисел $\mathbb{Z}$), то это либо понятно из контекста, либо специально оговаривается.

Множество X мы называем числовым множеством, если оно является подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ (то есть если $X \subset \mathbb{C}$). Если множество X является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$ (то есть если $X \subset \mathbb{R}$), то множество X, разумеется, тоже является числовым множеством (поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Отметим, что в математике существуют гиперкомплексные числа (например, кватернионы). При нашем понимании понятия “число” гиперкомплексные числа, вообще говоря, числами не являются. Аналогично, при нашем понимании понятия “числовое множество” множество, элементами которого являются гиперкомплексные числа, вообще говоря, не является числовым множеством.

[2] Упорядоченный набор длины n ($n \in \mathbb{N}$) обычно обозначают либо с помощью круглых скобок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, либо с помощью угловых скобок $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. В нашей статье для обозначения упорядоченных наборов мы используем угловые скобки. Это связано с тем, что круглые скобки имеют очень много совершенно различных значений (они используются в качестве знака препинания, обозначают порядок действий в математических формулах, фигурируют в символе $f(a)$, обозначающем значение отображения $f\colon A \to B$ на элементе $a \in A$, и т. д.) и вследствие этого в значительной степени потеряли свою математическую выразительность. По нашему мнению, использование угловых скобок для записи упорядоченных наборов делает текст более четким и легче воспринимаемым.

Элемент a_k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$) называют k-й компонентой упорядоченного набора $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Если все компоненты упорядоченного набора являются числами, то упорядоченный набор называется числовым.

Упорядоченный набор из двух компонент называют также упорядоченной парой, а упорядоченный набор из трех компонент называют также упорядоченной тройкой. Упорядоченный набор из одной компоненты мы будем отождествлять с самой этой компонентой, то есть мы будем считать, что, по определению, $\langle a\rangle = a$.

В некоторых книгах не рассматривают вложенные упорядоченные наборы, например, упорядоченную пару $\bigl\langle\langle a,\,b\rangle,\,c\bigr\rangle$, первой компонентой которой является упорядоченная пара $\langle a,\,b\rangle$, отождествляют с упорядоченной тройкой $\langle a,\,b,\,c\rangle$. Мы не считаем такое отождествление целесообразным и рассматриваем упорядоченную пару $\bigl\langle\langle a,\,b\rangle,\,c\bigr\rangle$ и упорядо-

$((4,\ 6) \in \mathbb{R}^2)$, наибольший общий делитель $((4,\ 6) = 2)$. Символ $|A|$ может обозначать модуль числа A, число элементов множества A, определитель матрицы A, объем тела A.

Между полисемией и омонимией нет непроходимой границы. Иногда сложно определить, имеем ли мы дело с различными значениями одного знака (полисемия) или с графически совпадающими различными знаками (омонимия).

Полисемия и омонимия могут существенно затруднить восприятие материала, а в некоторых случаях могут привести к его полному непониманию. Определить значение полисемичного знака (или определить, какой из нескольких омонимичных знаков используется в данном месте текста) можно только из контекста. Часто это бывает под силу сделать далеко не каждому студенту.

Здесь уместно процитировать высказывание известного советского математика и педагога А. Я. Хинчина: "...следует упомянуть еще об одной традиции математического стиля... Я имею в виду свойственную математике скрупулезную *точность символики*. Каждый математический символ имеет строго определенное значение; замена его другим символом или перестановка на другое место, как правило, влечет за собою искажение, а подчас и полное уничтожение смысла данного высказывания. $\langle\ldots\rangle$ Несоблюдение безукоризненной точности символической записи в математике влечет за собой немедленную расплату: он [учащийся] сам теряет возможность понять смысл записанного... и либо получает неправильный ответ, либо вообще лишает себя возможности решить задачу" [1].

Добавим к этому, что на то, чтобы понять, в каком смысле в данном месте текста понимается тот или иной символ, уходят время и силы. Чтение текста, в котором используются четкие и однозначные обозначения, приносит чувство удовлетворения, отнимает значительно меньше времени и приводит к лучшему пониманию материала, чем чтение текста, в котором используются обозначения, допускающие различное толкование. Поэтому следует стремиться использовать такую математическую символику, в которой (по крайней мере, в рамках одного раздела математики) отсутствуют (или сведены к минимуму) явления полисемии и омонимии.

ченную тройку $\langle a,\ b,\ c\rangle$ как различные математические объекты. В то же время, например, $\langle\langle a\rangle,\ b\rangle = \langle a,\ b\rangle$ (поскольку $\langle a\rangle = a$).

Пусть A — множество, состоящее из элементов любой природы, причем $A \neq \varnothing$. Множество, состоящее из всех упорядоченных наборов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ таких, что $a_k \in A$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, называется n-й степенью (или n-й декартовой степенью) множества A и обозначается символом A^n. Очевидно, $A^1 = A$. Если $A = \varnothing$, то, по определению, $A^n = \varnothing$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ называют n-мерным комплексным координатным пространством. Множество $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ называют n-мерным действительным координатным пространством. Обычно для краткости говорят просто "пространство $\mathbb{C}^n$" и "пространство $\mathbb{R}^n$". Очевидно, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Понятие "n-мерное комплексное (действительное) координатное пространство" следует отличать от используемого в линейной алгебре понятия "n-мерное линейное пространство над полем комплексных (действительных) чисел".

Подробнее о явлениях полисемии и омонимии в знаковых системах (одной из таких знаковых систем является математическая символика) можно прочитать в литературе по семиотике (см., например, [2]).

§ 2. ПОЛИСЕМИЧНОСТЬ СИМВОЛОВ e^z, $\sqrt[n]{z}$, a^z, z^α

В теории функций комплексной переменной[3] (ТФКП) иногда одним и тем же символом обозначают как одно какое-либо значение многозначной функции, так и множество всех значений этой многозначной функции. Речь, прежде всего, идет о следующих многозначных функциях: 1) многозначная экспонента; 2) многозначный корень n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$); 3) показательная многозначная функция с основанием a ($a \in \mathbb{C}$); 4) степенная многозначная функция с показателем α ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Символы e^z, $\sqrt[n]{z}$, a^z, z^α могут обозначать, в зависимости от контекста, либо одно из значений (обычно главное значение) соответствующей многозначной функции, либо сразу множество всех значений этой многозначной функции. Очевидно, что здесь мы имеем дело с явлением полисемии.

Больше повезло тем многозначным функциям, которые обозначаются с помощью последовательности букв латинского алфавита. В русской математической литературе получило широкое распространение очень удобное соглашение, согласно которому последовательность латинских букв, начинающаяся с прописной буквы, служит для обозначения множества всех значений многозначной функции, а та же последовательность, начинающаяся со строчной буквы, служит для обозначения главного значения этой многозначной функции (см., например, [3–7]). Например, символ $\operatorname{Ln} z$ обозначает множество всех значений многозначного логарифма, а символ $\ln z$ обозначает главное значение многозначного логарифма. Можно провести параллель между этим соглашением и тем, что множества в математике обычно обозначают прописными буквами (A, B, $C, \ldots$), а элементы множеств — строчными буквами (a, b, $c, \ldots$)[4].

Полисемичность символов e^z, $\sqrt[n]{z}$, a^z, z^α может не только затруднять восприятие материала, но может также быть причиной ошибок при решении задач. Приведем конкретный пример.

[3] Отметим, что иногда говорят не “теория функций комплексной переменной”, а “теория функций комплексного переменного”. Фактически вопрос сводится к тому, какого рода существительное “переменная” (“переменное”): женского или среднего. Аналогичный вопрос существует по отношению к словам “постоянная” (“постоянное”) и “неизвестная” (“неизвестное”). В литературе эти слова встречаются как в женском, так и в среднем роде. Мы придерживаемся соглашения, что все эти существительные женского рода.

[4] К сожалению, в зарубежной математической литературе часто встречается противоположное соглашение, а именно последовательность латинских букв, начинающаяся с прописной буквы, служит для обозначения главного значения многозначной функции, а та же последовательность, начинающаяся со строчной буквы, служит для обозначения множества всех значений этой многозначной функции. По нашему мнению, в данном случае более удачными являются отечественные обозначения.

Рассмотрим[5] задачу 13.70 из части 3 задачника [3]: получить аналитическое выражение для функции $w = \operatorname{Arcsin} z$ и найти значение этой функции в точке $z_0 = i$.

В конце задачника приведен следующий ответ: $\operatorname{Arcsin} z = -\,i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}\,)$, $\operatorname{Arcsin} i = 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

После некоторого размышления внимательный читатель должен заметить, что авторы задачника допустили ошибку.

В формуле $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}\,)$, как следует из её вывода, символ $\sqrt{1-z^2}$ обозначает множество всех значений многозначного корня 2-й степени из числа $1 - z^2$. Подставляя вместо z значение $z_0 = i$, авторы по ошибке интерпретировали символ $\sqrt{2}$ как арифметический корень, тогда как в данной задаче символ $\sqrt{2}$ обозначает не одно число, а два. В результате авторы потеряли вторую серию значений арксинуса: $\pi + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Мы привели этот пример не для того, чтобы бросить тень на сборник задач [3], который, по нашему мнению, является в настоящее время одним из лучших задачников для технических вузов с расширенной программой по математике. Нашей целью было показать, как важно в математике, чтобы каждый математический знак, символ имел одно строго определенное значение, которое бы не зависело от контекста.

Авторы некоторых книг и учебников по ТФКП пытались усовершенствовать математическую символику, с тем чтобы устранить полисемичность символов e^z, $\sqrt[n]{z}$, a^z, z^α. В частности, некоторые авторы обозначают символом $\sqrt[n]{z}$ множество всех значений многозначного корня n-й степени из z ($z \in \mathbb{C}$), а для обозначения арифметического корня n-й степени из z ($z \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 0$) используют символ $\underset{+}{\sqrt[n]{z}}$ (см., например, [4–6]). Символом e^z в некоторых книгах обозначается множество всех значений многозначной экспоненты, тогда как для обозначения главного значения многозначной экспоненты используется символ $\exp z$ (см., например, [7]).

Описанные способы устранения полисемичности символов $\sqrt[n]{z}$ и e^z, по нашему мнению, нельзя признать очень удачными. Что означают, скажем, символы $\sqrt{2}$ и $e^{2/3}$? Если эти символы понимаются в том смысле, в котором они используются в школе и в вузе при изучении действительного анализа, то они обозначают числа. Если же эти символы понимаются в том смысле, в котором их используют авторы упомянутых книг, то они обозначают множества. Таким образом, устранения полисемии на самом деле не происходит и символы $\sqrt[n]{z}$ и e^z остаются многозначными. Чтобы определить их значение, надо понять, в каком смысле: “не-ТФКП”- или “ТФКП”- — эти символы используются в данном месте текста.

При введении новых символов, как мы считаем, надо стремиться к тому, чтобы все ранее использовавшиеся символы сохраняли свои значения. Ниже (в § 4) мы сформулируем это требование как “принцип преемственности обо-

[5] Мы приводим формулировку задачи так, как она дана в задачнике [3]. Эта формулировка, по нашему мнению, является не совсем точной. Правильную (с нашей точки зрения) формулировку см. ниже (§ 7, пример 1).

значений". Символы $\sqrt[n]{z}$ ($z \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 0$) и e^z ($z \in \mathbb{R}$) обозначают в школе (и в вузе при изучении действительного анализа) числа, а не множества. При переходе из школы в вуз и в вузе при переходе от изучения действительного к изучению комплексного анализа эти символы должны сохранять свои значения. Что же касается множества всех значений многозначного корня n-й степени и множества всех значений многозначной экспоненты, то как раз для этих не встречавшихся раньше (то есть до изучения ТФКП) математических объектов можно и нужно ввести специальные обозначения.

В настоящей статье мы предлагаем последовательную систему обозначений для всех основных многозначных функций комплексной переменной и для значений этих многозначных функций. В этой системе обозначений отсутствует явление полисемии, то есть значение каждого математического символа определяется исключительно его графической структурой и не зависит от контекста.

§ 3. ОТОБРАЖЕНИЯ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе определяются некоторые используемые нами понятия и вводятся некоторые обозначения.

Пусть A и B — множества, состоящие из элементов любой природы, причем $B \neq \varnothing$.

Определение 1. Пусть каждому элементу множества A поставлен в соответствие некоторый элемент множества B. Тогда говорят, что задано *отображение* f множества A во множество B и пишут $f\colon A \to B$.

Определение 2. Пусть $f\colon A \to B$ — отображение множества A во множество B. Элемент $b \in B$, который отображение f ставит в соответствие элементу $a \in A$, называется *значением* отображения f на элементе a и обозначается $f(a)$.

Прежде чем давать следующее определение, напомним, что символом[6] $P(B)$ обозначается булеан (множество всех подмножеств) множества B. Например, если $B = \{1,\, 2\}$, то $P(B) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,\, 2\}\big\}$.

Обозначим символом[7] $P^*(B)$ множество всех непустых подмножеств множества B. Иначе говоря, $P^*(B) = P(B) \setminus \{\varnothing\}$.

Определение 3. Отображение $F\colon A \to P^*(B)$ множества A во множество $P^*(B)$ называется *многозначным отображением* множества A во множество B.

Отметим, что отображения мы обозначаем строчными латинскими буквами (f, g, $h, \dots$), а многозначные отображения — прописными латинскими буквами (F, G, $H, \dots$).

Определение 4. Пусть $F\colon A \to P^*(B)$ — многозначное отображение множества A во множество B и пусть a — произвольный элемент множества A.

[6] Символ $P(B)$ происходит от первой буквы английского термина power set — булеан.

[7] Символ $P^*(B)$ для обозначения множества всех непустых подмножеств множества B используется, например, в книге [8]. Использование звездочки в символе $P^*(B) = P(B) \setminus \setminus \{\varnothing\}$ чем-то аналогично использованию звездочки в символах $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (поскольку число элементов пустого множества равно нулю).

Каждый элемент b непустого множества $F(a) \subset B$ называется *значением* многозначного отображения F на элементе a.

Определение 5. Пусть $F\colon A \to P^*(B)$ и $F_1\colon A \to P^*(B)$ — многозначные отображения множества A во множество B. Многозначное отображение F_1 называется *ветвью* многозначного отображения F, если для любого $a \in A$ множество $F_1(a)$ является подмножеством множества $F(a)$, то есть $F_1(a) \subset \subset F(a)$.

Определение 6. Пусть $f\colon A \to B$ — отображение множества A во множество B и пусть $F\colon A \to P^*(B)$ — многозначное отображение множества A во множество B. Отображение f называется *однозначной ветвью* многозначного отображения F, если для любого $a \in A$ элемент $f(a)$ принадлежит множеству $F(a)$, то есть $f(a) \in F(a)$.

Определение 7. Множество A называется *множеством определения* отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$) и обозначается символом $V(f)$ $(V(F))$.

Итак, по определению, $V(f) = A$ $(V(F) = A)$.

Определение 8. Множество $\{b \in B \mid (\exists\, a \in A)\colon b = f(a)\}$ $(\{b \in B \mid (\exists\, a \in \in A)\colon b \in F(a)\})$ называется *множеством значений* отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$) и обозначается символом $W(f)$ $(W(F))$.

Из этого определения следует, что $W(f) \subset B$ $(W(F) \subset B)$.

Определение 9. Множество B называется *множеством прибытия* отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$).

Определение 10. Отображение $f_1\colon A_1 \to B$ (многозначное отображение $F_1\colon A_1 \to P^*(B)$) множества A_1 во множество B называется *сужением* на множество E отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to \to P^*(B)$) множества A во множество B, если $A_1 = A \cap E$ и при всех $a \in A_1$ выполняется равенство $f_1(a) = f(a)$ $(F_1(a) = F(a))$.

Сделаем несколько замечаний относительно приведенных определений и обозначений.

Замечание 1. Наряду с терминами "множество определения", "множество значений", "множество прибытия" часто используют термины "область определения", "область значений", "область прибытия". Однако следует иметь в виду, что термин "область" имеет в математике (в частности, в ТФКП) еще одно очень важное значение, а именно он обозначает непустое открытое линейно связное множество. Во избежание недоразумений и для большей четкости терминологии мы предлагаем не использовать такие термины, как "область определения", "область значений", "область сходимости ряда", "замкнутая область" и т. д., поскольку обозначаемые этими терминами множества, вообще говоря, не являются областями. Вместо перечисленных терминов, как мы считаем, следует использовать термины "множество определения", "множество значений", "множество сходимости ряда", "множество, являющееся замыканием области" и т. д. Отметим, что именно так поступают некоторые авторы (см., например, [6]). Что касается областей (то есть непустых открытых линейно связных множеств), то их мы предлагаем обозначать буквами D, D_1, D', ... (по первой букве английского слова domain — область).

Замечание 2. Обычно множество определения отображения f (многозначного отображения F) обозначают символом $D(f)$ ($D(F)$). Поскольку буквой D мы обозначаем области, а множество определения, вообще говоря, областью не является, то обозначение $D(f)$ ($D(F)$) для множества определения, по нашему мнению, является не очень удачным[8]. Мы предлагаем обозначать множество определения символом $V(f)$ ($V(F)$). Буква V, в отличие от буквы D, не имеет посторонней смысловой нагрузки и может быть мотивирована как первая буква английского слова value — значение. Множество $V(f)$ ($V(F)$) — это множество значений, которые принимает независимая переменная a. Еще раз отметим, что если отображение f (многозначное отображение F) отображает множество A во множество B, то $V(f) = A$ ($V(F) = A$).

Замечание 3. В математической литературе встречаются разные обозначения для множества значений отображения f (многозначного отображения F): $R(f)$, $E(f)$, $W(f)$ (соответственно $R(F)$, $E(F)$, $W(F)$). Мы предлагаем обозначать множество значений символом $W(f)$ ($W(F)$). Буква W может быть мотивирована как первая буква немецкого слова der Wert — значение. Множество $W(f)$ ($W(F)$) — это множество значений, которые принимает зависимая переменная $b = f(a)$ ($b \in F(a)$).

Множество определения и множество значений — это родственные понятия. Поэтому представляется логичным использовать для их обозначения графически сходные и стоящие рядом в алфавите буквы V и W.

Отметим, что символ $W(f)$ для обозначения множества значений отображения f используется, например, в справочнике [10].

Замечание 4. В определении 2 было сказано, что символ $f(a)$, где $a \in$ $\in V(f)$, обозначает значение отображения f на элементе a. Однако часто символ $f(a)$ используют для обозначения самого отображения f. В этом случае символ $f(a)$ фактически выступает в роли синонима символа f. (По поводу явления синонимии в математической символике см. также § 6, замечание 1.) Обычно из контекста бывает понятно, обозначает ли символ $f(a)$ отображение или значение этого отображения на данном конкретном элементе a.

Отметим, что в математике часто встречается составной символ $f(a)$, $a \in A$. Этот символ, во-первых, обозначает отображение f и, во-вторых, сообщает читателю, что отображение f имеет множество определения $V(f) = A$.

Совершенно аналогичные замечания можно сделать в случае многозначного отображения F относительно символа $F(a)$ и составного символа $F(a)$, $a \in A$.

Замечание 5. Если множество значений $W(f)$ ($W(F)$) отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$) является числовым множеством, то есть если $W(f) \subset \mathbb{C}$ ($W(F) \subset \mathbb{C}$), то наряду с термином “отображение” (“многозначное отображение”) часто используют термин “функция” (“многозначная функция”)[9].

[8] Отметим также, что символ $D(f)$ иногда используется для обозначения производной (или для обозначения дифференциала) отображения f (см., например, [9]).

[9] В некоторых книгах отображение f (многозначное отображение F) множества A во множество B называют функцией (многозначной функцией), если множество B является числовым множеством. Очевидно, что приводимое нами определение является более ши-

Если множество определения $V(f)$ $(V(F))$ функции f (многозначной функции F) является подмножеством n-мерного комплексного координатного пространства $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, то есть если $V(f) \subset \mathbb{C}^n$ $(V(F) \subset \mathbb{C}^n)$, то функция f (многозначная функция F) называется функцией (многозначной функцией) n числовых переменных[10]. Если $V(f) \subset \mathbb{R}^n$ $(V(F) \subset \mathbb{R}^n)$, то функция f (многозначная функция F), разумеется, тоже является функцией (многозначной функцией) n числовых переменных (поскольку $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$).

Пусть f — функция n числовых переменных ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) и пусть $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in V(f)$. Тогда число $f(x) = f(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)$ для краткости обычно обозначают символом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть F — многозначная функция n числовых переменных ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) и пусть $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in$ $\in V(F)$. Тогда числовое множество $F(x) = F(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)$ для краткости обычно обозначают символом $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Замечание 6. Часто встречается ситуация, когда функция f (многозначная функция F) n числовых переменных ($n \in \mathbb{N}$) задана с помощью формулы $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, причем множество определения этой функции (многозначной функции) явно не указано. В этом случае считают, что множество определения данной функции (многозначной функции) состоит из всех упорядоченных числовых наборов $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ таких, что при подстановке в данной формуле вместо переменной x_1 числа a_1, вместо переменной x_2 числа a_2, …, вместо переменной x_n числа a_n получается выражение $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(F(a_1, a_2, \ldots, a_n))$, которое имеет смысл и результатом которого является число (числовое множество).

Понимаемое так множество определения функции (многозначной функции), заданной формулой, называется естественным множеством определения этой функции (многозначной функции). При этом следует различать два случая.

1. Числа a_k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$) могут принимать любые комплексные значения. В этом случае естественное множество определения функции f (многозначной функции F) мы будем называть естественным множеством определения над полем комплексных чисел и обозначать символом $V_{\mathbb{C}}(f)$ $(V_{\mathbb{C}}(F))$.

2. Числа a_k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$) могут принимать лишь действительные значения и число $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является действительным (множество $F(a_1,\, a_2, \ldots, a_n)$ состоит только из действительных чисел)[11]. В этом случае естественное множество определения функции f (многозначной функции F)

роким: мы не требуем, чтобы числовым множеством было множество B, а требуем лишь, чтобы числовым множеством было подмножество $W(f)$ $(W(F))$ множества B.

[10] В математическом анализе переменные обычно принимают лишь числовые значения. Поэтому в термине "функция (многозначная функция) n числовых переменных" $(n \in \mathbb{N})$ слово "числовых" обычно опускают.

[11] Действительными числами (множествами, состоящими только из действительных чисел) должны быть также результаты всех промежуточных действий, присутствующих в выражении $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(F(a_1, a_2, \ldots, a_n))$. Например, выражение $\sqrt{x}\,\sqrt{x}$ определено и принимает действительные значения при всех $x \in \mathbb{R}$ (при всех $x \in \mathbb{C}$ символ $\sqrt{x}$ обозначает главное значение многозначного корня 2-й степени из числа x; если $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, то $\sqrt{x} = i\sqrt{|x|}$). Однако функция $f(x) = \sqrt{x}\,\sqrt{x}$ имеет естественное множество определения над полем действительных чисел $V_{\mathbb{R}}(f) = [0, +\infty)$, поскольку при $x < 0$ промежуточное выражение $\sqrt{x}$, входящее в выражение $\sqrt{x}\,\sqrt{x}$, не является действительным числом.

мы будем называть естественным множеством определения над полем действительных чисел и обозначать символом $V_{\mathbb{R}}(f)$ $(V_{\mathbb{R}}(F))$.

Например, функция $f(x) = \ln x$ имеет естественные множества определения $V_{\mathbb{C}}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $V_{\mathbb{R}}(f) = (0,\, +\infty)$, а многозначная функция $F(x) = \operatorname{Arccos} x$ имеет естественные множества определения $V_{\mathbb{C}}(F) = \mathbb{C}$ и $V_{\mathbb{R}}(F) = [-1,\, 1]$.

Очевидно, что множество $V_{\mathbb{C}}(f)$ $(V_{\mathbb{C}}(F))$ является подмножеством n-мерного комплексного координатного пространства $\mathbb{C}^n$, а множество $V_{\mathbb{R}}(f)$ $(V_{\mathbb{R}}(F))$ является подмножеством n-мерного действительного координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим также, что для любой заданной формулой функции f (многозначной функции F) выполняется включение $V_{\mathbb{R}}(f) \subset V_{\mathbb{C}}(f)$ $(V_{\mathbb{R}}(F) \subset V_{\mathbb{C}}(F))$.

В нашей статье символ $V(f)$ $(V(F))$ часто является синонимом символа $V_{\mathbb{C}}(f)$ $(V_{\mathbb{C}}(F))$. Например, предложение "Функция $f(x) = \ln x$ имеет множество определения $V(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$" имеет тот же смысл, что и предложение "Заданная формулой $y = \ln x$ (или формулой $f(x) = \ln x$) функция $f(x)$ имеет естественное множество определения над полем комплексных чисел $V_{\mathbb{C}}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$".

Замечание 7. Множество определения отображения (многозначного отображения) может быть пустым множеством. Например, функция $f(x) = \arccos x + \ln(x^2 - 4)$ имеет пустое естественное множество определения над полем действительных чисел, то есть $V_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing$.

Отображение (многозначное отображение), которое имеет пустое множество определения, называется пустым отображением (пустым многозначным отображением). Функция (многозначная функция), которая имеет пустое множество определения, называется пустой функцией (пустой многозначной функцией).

"Пустое отображение полезно тем же, чем пустое множество. Оно облегчает действия с отображениями, избавляя от некоторых забот, и помогает сократить многие формулировки" [11].

Отметим, что, в отличие от множества определения, множество прибытия отображения (многозначного отображения) не может быть пустым множеством. Действительно, если $A \neq \varnothing$ и $B = \varnothing$, то не существует ни одного отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$) множества A во множество B.

Замечание 8. Из определения 3 следует, что понятие "отображение множества A во множество B" не является частным случаем понятия "многозначное отображение множества A во множество B". Это связано с тем, что отображение ставит в соответствие элементам множества A *элементы* множества B, тогда как многозначное отображение ставит в соответствие элементам множества A непустые *подмножества* (пусть даже одноэлементные) множества B.

По аналогичным причинам понятие "однозначная ветвь многозначного отображения множества A во множество B" не является частным случаем понятия "ветвь многозначного отображения множества A во множество B".

Замечание 9. Пусть $F\colon A \to P^*(B)$ и пусть $a \in A$. Если рассматривать F как отображение множества A во множество $P^*(B)$, то значением этого отображения на элементе a будет непустое *множество* $F(a) \subset B$ (см. определение 2). Если же рассматривать F как многозначное отображение множества A во множество B (см. определение 3), то значениями этого многозначного отображения на элементе a будут *элементы* множества $F(a)$ (см. определение 4).

Такая терминология может показаться нелогичной, но она общепринята. Например, говорят: "Многозначный корень n-й степени из z ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$) принимает n различных значений", вместо того чтобы сказать: "Значением многозначного корня n-й степени из z ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$) является множество из n элементов". Даже само слово "многозначный" содержит в себе как бы намек на то, что многозначное отображение принимает на данном элементе a, вообще говоря, "много значений".

Если же подходить сугубо формально, то, поскольку "отображение множества A во множество B" и "многозначное отображение множества A во множество B" — это разные понятия (см. замечание 8), у нас есть полное право по-разному определить и понятия "значение отображения" и "значение многозначного отображения". Так что с формально-логической точки зрения никакого противоречия в наших определениях нет.

Замечание 10. При определении сужения на множество E отображения $f\colon A \to B$ (многозначного отображения $F\colon A \to P^*(B)$) множества A во множество B часто требуют, чтобы множество E было подмножеством множества определения $V(f) = A$ ($V(F) = A$) отображения f (многозначного отображения F). В некоторых случаях это требование может привести к дополнительным сложностям. Пусть, например, $f(x) = \arccos(x^3 - x + 1)$ и $V(f) = V_{\mathbb{R}}(f)$. Можно ли рассмотреть сужение функции $f(x)$ на отрезок $[-1,\, 1]$? При стандартном определении сужения отображения (многозначного отображения) на множество ответ на этот вопрос не очевиден[12], поскольку заранее не ясно, выполняется ли включение $[-1,\, 1] \subset V(f)$.

В ряде случаев хотелось бы иметь возможность говорить о сужении отображения f (многозначного отображения F) на множество E, не заботясь о том, содержится или нет множество E во множестве определения отображения f (многозначного отображения F). Именно поэтому в определении 10 мы не накладываем условие $E \subset V(f)$ ($E \subset V(F)$).

Отметим, что множество определения $A_1 = A \cap E$ сужения отображения (многозначного отображения) на множество E является подмножеством множества определения A исходного отображения (многозначного отображения). В частности, если $E \subset A$, то $A_1 = E$, а если $A \subset E$, то $A_1 = A$.

Сужение отображения f на множество E обозначается символом $f\big|_E$. Поскольку символ $f(a)$ часто выступает в роли синонима символа f (см. выше

[12] Мы специально приводим здесь не самый сложный пример, который можно придумать. В данном случае легко заметить, что, например, число $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ принадлежит отрезку $[-1,\, 1]$ и не принадлежит множеству определения $V(f)$ функции $f(x)$. Поэтому $[-1,\, 1] \not\subset V(f)$ и при стандартном определении сужения отображения (многозначного отображения) на множество нельзя говорить о сужении функции $f(x)$ на отрезок $[-1,\, 1]$.

замечание 4), то для обозначения сужения отображения f на множество E используют также символ $f(a)\big|_E$. Аналогично, сужение многозначного отображения F на множество E обозначают символами $F\big|_E$ и $F(a)\big|_E$.

§ 4. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

Сформулируем основные принципы, которыми надо руководствоваться при построении математической символики.

Принцип 1 (принцип системности). Математические символы, используемые в каждом разделе математики, должны образовывать систему. Это связано с тем, что математические символы служат для обозначения математических понятий, а понятия, используемые в каждом разделе математики, образуют целостную совокупность взаимосвязанных элементов, то есть систему. Системный характер математической символики нашел свое отражение даже в самом термине "система обозначений".

Принцип 2 (принцип однозначности). Каждому математическому символу должно однозначно соответствовать обозначаемое им понятие. Значение символа не должно зависеть от контекста (по крайней мере, в пределах одного раздела математики), а должно определяться исключительно его графической структурой. Соблюдение этого принципа существенно повышает доступность материала, способствует его более быстрому восприятию и более глубокому пониманию.

Принцип 3 (принцип преемственности). При расширении системы обозначений все ранее введенные символы должны сохранять свои значения и должны входить в новую систему обозначений в качестве подсистемы. Например, символ $\sqrt[n]{z}$ ($z \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) обозначает в школе неотрицательное действительное число, n-я степень которого равна z (арифметический корень n-й степени). Символ $\sqrt[n]{z}$ ($z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, $n = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$) обозначает в школе отрицательное действительное число, n-я степень которого равна z. При расширении системы обозначений эти символы должны сохранить свои значения.

Принцип 4 (принцип мотивированности). Графические элементы, из которых состоит символ, должны быть по возможности мотивированными. Например, должно быть понятно, почему в состав символа входят, скажем, фигурные скобки, а не круглые или квадратные, и т. п.

Принцип 5 (принцип экономности). Число новых вводимых символов должно быть минимальным, а каждый из этих символов должен иметь как можно более простую структуру, то есть должен состоять из наименьшего возможного числа как можно более простых графических элементов.

§ 5. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ДЛЯ ИХ ЗНАЧЕНИЙ

Руководствуясь изложенными выше принципами, мы разработали систему обозначений для всех основных многозначных функций комплексной переменной и для значений этих многозначных функций. Предлагаемая система обозначений удовлетворяет, в частности, принципу однозначности, и в ней устранена отмеченная в § 2 полисемичность символов e^z, $\sqrt[n]{z}$, a^z, z^α.

Перечислим основные символы нашей системы обозначений, сгруппировав их по тем многозначным функциям, к которым они относятся. Для полноты картины мы приводим не только новые, специально созданные нами символы, но и те символы, которые уже существуют и успешно используются в математике и которые вошли в разработанную нами систему обозначений.

Приводимые ниже многозначные функции можно разделить на два типа. К первому типу относятся многозначные функции $\operatorname{Arg} z$, $\{e^z\}_{\mathbb{C}} \equiv \operatorname{Exp} z$, $\operatorname{Ln} z$, $\{\sqrt[n]{z}\}_{\mathbb{C}}$, $\{a^z\}_{\mathbb{C}}$, $\{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$. Ко второму типу относятся многозначные функции $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arcsec} z$, $\operatorname{Arccosec} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arsech} z$, $\operatorname{Arcosech} z$.

Символ $F(z)$ обозначает многозначную функцию (как в случае многозначной функции первого типа, так и в случае многозначной функции второго типа).

Многозначные функции первого типа. Эти многозначные функции имеют одну серию значений. Символ $f_k(z)$ обозначает k-е значение многозначной функции $F(z)$. Если $k = 0$, то символ $f_k(z)$ (то есть символ $f_0(z)$) обозначает главное значение многозначной функции $F(z)$.

Индекс k принадлежит множеству K, которое мы называем множеством индексов[13]. У некоторых многозначных функций множество индексов зависит от z и поэтому мы его обозначаем $K(z)$. При всех $z \in V(F)$ справедливо равенство[14] $F(z) = \{f_k(z) \mid k \in K\}$ $(F(z) = \{f_k(z) \mid k \in K(z)\})$.

Если множество индексов K не зависит от z, то функция $f_k(z)$ имеет множество определения $V(f_k) = V(F)$ при $k \in K$ и множество определения $V(f_k) = \varnothing$ при $k \notin K$. Если множество индексов $K(z)$ зависит от z, то функция $f_k(z)$ имеет множество определения $V(f_k) = \{z \in V(F) \mid k \in K(z)\}$.

Число 0 всегда принадлежит множеству индексов K $(K(z))$. Поэтому функция $f_0(z)$ имеет множество определения $V(f_0) = V(F)$. Поскольку $V(f_0) = V(F)$ и при любом $z \in V(F)$ справедливо включение $f_0(z) \in F(z)$, то функция $f_0(z)$ является однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$ (см. § 3, определение 6). Функция $f_0(z)$ называется главной однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$.

Отметим, что при $k \neq 0$ функция $f_k(z)$ может иметь множество определения $V(f_k)$, отличное от множества определения $V(F)$ многозначной функции $F(z)$. В этом случае функция $f_k(z)$ не является однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$.

При любом $z \in V(F)$ и при любых k_1, $k_2 \in K$ $(k_1, k_2 \in K(z))$ таких, что $k_1 \neq k_2$, выполняется неравенство $f_{k_1}(z) \neq f_{k_2}(z)$. Это означает, что в

[13] Возможно, индекс лучше было бы обозначать буквой i, а множество индексов буквой I (по первой букве английского слова index — индекс). Однако в нашей статье буква i используется для обозначения мнимой единицы. Поэтому для обозначения индекса мы используем букву k, а для обозначения множества индексов букву K.

[14] Здесь и далее символ $\{g(a) \mid a \in A\}$ часто будет использоваться для сокращенной записи множества $\{b \in \mathbb{C} \mid (\exists\, a \in A)\colon b = g(a)\}$. (Мы считаем, что g — функция, то есть $W(g) \subset \mathbb{C}$.)

данной фиксированной точке $z \in V(F)$ различным значениям индекса $k \in K$ ($k \in K(z)$) отвечают различные значения многозначной функции $F(z)$. При решении некоторых задач может оказаться полезным отказаться от этого ограничения, разрешив индексу k меняться в более широких пределах, чем в пределах множества K ($K(z)$). См. по этому поводу § 6, замечания 27, 28.

Многозначные функции второго типа. Эти многозначные функции имеют две серии значений. Символ $f_k^{(1)}(z)$ обозначает k-е значение первой серии. Символ $f_k^{(2)}(z)$ обозначает k-е значение второй серии. Если $k = 0$, $j = 1$, то символ $f_k^{(j)}(z)$ (то есть символ $f_0^{(1)}(z)$) обозначает главное значение многозначной функции $F(z)$.

Индекс k принадлежит множеству индексов $K^{(1)}$ (в случае первой серии) или множеству индексов $K^{(2)}(z)$ (в случае второй серии). Первое множество индексов $K^{(1)}$ не зависит от z и равно $\mathbb{Z}$. Второе множество индексов $K^{(2)}(z)$ зависит от z и равно[15]

$$K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad z \neq \pm a; \\ \varnothing, & \text{если} \quad z = \pm a. \end{cases}$$

Число a равно 1 в случае многозначных функций $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arcsec}\, z$, $\mathrm{Arccosec}\, z$, $\mathrm{Arch}\, z$, $\mathrm{Arsech}\, z$ и равно i в случае многозначных функций $\mathrm{Arsh}\, z$, $\mathrm{Arcosech}\, z$. При всех $z \in V(F)$ справедливо равенство $F(z) = \{f_k^{(1)}(z) \mid k \in K^{(1)}\} \cup \{f_k^{(2)}(z) \mid k \in K^{(2)}(z)\}$.

С учетом того, чему равны множества индексов $K^{(1)}$ и $K^{(2)}(z)$, получаем, что функции $f_k^{(1)}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют множество определения $V(f_k^{(1)}) = V(F)$, а функции $f_k^{(2)}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют множество определения $V(f_k^{(2)}) = V(F) \setminus \{\pm a\}$.

Отметим, что при любом $k \in \mathbb{Z}$ функция $f_k^{(1)}(z)$ является однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$ (поскольку $V(f_k^{(1)}(z)) = V(F)$), а функция $f_k^{(2)}(z)$ не является однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$ (поскольку $V(f_k^{(2)}(z)) = V(F) \setminus \{\pm a\} \neq V(F)$). Функция $f_0^{(1)}(z)$ называется главной однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$.

При любом $z \in V(F)$ и при любых k_1, $k_2 \in K^{(1)}$ (k_1, $k_2 \in K^{(2)}(z)$) таких, что $k_1 \neq k_2$, выполняется неравенство $f_{k_1}^{(1)}(z) \neq f_{k_2}^{(1)}(z)$ ($f_{k_1}^{(2)}(z) \neq f_{k_2}^{(2)}(z)$). Это означает, что в данной фиксированной точке $z \in V(F)$ в пределах первой серии значений и в пределах второй серии значений различным значениям индекса k отвечают различные значения многозначной функции $F(z)$.

Кроме того, при любом $z \in V(F)$ и при любых $k_1 \in K^{(1)}$, $k_2 \in K^{(2)}(z)$ выполняется неравенство $f_{k_1}^{(1)}(z) \neq f_{k_2}^{(2)}(z)$. Это означает, что в данной фиксированной точке $z \in V(F)$ первая и вторая серии значений не имеют общих элементов (не пересекаются). При решении некоторых задач может оказаться полезным отказаться от этого ограничения, разрешив индексу k меняться в более широких пределах, чем в пределах множества $K^{(2)}(z)$. См. по этому поводу § 6, замечание 29.

[15] Пусть $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда символ $\{\pm y\}$ обозначает множество $\{y, -y\}$, запись $x = \pm y$ означает, что $x \in \{\pm y\}$, а запись $x \neq \pm y$ означает, что $x \notin \{\pm y\}$.

После этих вводных замечаний мы переходим к предлагаемой нами системе обозначений для многозначных функций комплексной переменной и для значений этих многозначных функций.

1. Многозначный аргумент.

$F(z) = \operatorname{Arg} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$f_0(z) = (\arg z)_0 \equiv \arg z \ (\arg z \in (-\pi,\ \pi]\,)$.

$f_k(z) = (\arg z)_k = \arg z + 2\pi k$.

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}$.

2. Многозначная экспонента.

$F(z) = \{e^z\}_{\mathbb{C}} \equiv \operatorname{Exp} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}$.

$f_0(z) = (e^z)_0 \equiv (\exp z)_0 \equiv e^z \equiv \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$).

$f_k(z) = (e^z)_k \equiv (\exp z)_k = e^{z\,(1 + i\cdot 2\pi k)}$.

Множество индексов:

$$K(z) = \begin{cases} [0\,..\,q-1], & \text{если } z = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ и дробь } \dfrac{p}{q} \text{ несократима}^{16}; \\ \mathbb{Z}, & \text{если } z \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3. Многозначный логарифм.

$F(z) = \operatorname{Ln} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$f_0(z) = (\ln z)_0 \equiv \ln z = \ln |z| + i \arg z$.

$f_k(z) = (\ln z)_k = \ln z + i \cdot 2\pi k$.

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}$.

[16]Символом $[m\,..\,n]$, где $m,\, n \in \mathbb{Z}$, мы обозначаем множество $\{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\}$. Это множество мы предлагаем называть “сегмент от m до n” (другое, более длинное название: “отрезок целых чисел от m до n”). Очевидно, что если $m > n$, то $[m\,..\,n] = \varnothing$, а если $m = n$, то $[m\,..\,n] = [m\,..\,m] = \{m\}$.

Отметим, что в математической литературе, а также в некоторых языках программирования и некоторых математических пакетах встречаются символы, достаточно близкие к символу $[m\,..\,n]$.

Например, в статьях по комбинаторике слов (см., например, [12]) символ $w[m\,..\,n]$ часто используется для обозначения подслова слова w, расположенного в позициях от m до n (здесь $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant |w|$, $|w|$ — длина слова w).

В языке программирования Pascal оператор описания типа `a: array [m..n] of real` задает массив `a` действительных чисел с элементами `a[m]`, `a[m+1]`, …, `a[n]` ($m,\, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$).

В математическом пакете Maple команда `sum(k^2,k=m..n)` позволяет вычислить сумму квадратов всех целых чисел от m до n ($m,\, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$).

Использование в символе $[m\,..\,n]$ квадратных скобок связано с тем, что в общей алгебре (см., например, [13]) символ $[a,\, b]_P$ используется для обозначения множества $\{x \in P \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. (Здесь P — произвольное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$.) Таким образом, используемый нами символ $[m\,..\,n]$ можно рассматривать как другую форму записи символа $[m,\, n]_{\mathbb{Z}}$.

Предлагаемый нами символ $[m\,..\,n]$, по нашему мнению, обладает целым рядом достоинств. Он компактен, универсален (может использоваться как при $m < n$, так и при $m \geqslant n$), нагляден. Запись вида $k \in [m\,..\,n]$, по нашему мнению, легче воспринимается и точнее отражает суть дела, чем стандартная запись $k = m,\, m+1, \ldots, n$, в которой знак равенства фактически выступает в качестве знака принадлежности.

4. Многозначный корень n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

$F(z) = \{\sqrt[n]{z}\,\}_{\mathbb{C}}$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}$.

$$f_0(z) = (\sqrt[n]{z}\,)_0 = \begin{cases} \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\,\frac{\arg z}{n}}, & \text{если } z \neq 0; \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

$$f_k(z) = (\sqrt[n]{z}\,)_k = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\,\frac{(\arg z)_k}{n}} \quad (k \neq 0).$$

Множество индексов: $K(z) = \begin{cases} [0\,..\,n-1], & \text{если } z \neq 0; \\ \{0\}, & \text{если } z = 0. \end{cases}$

Дополнительные символы:

$\sqrt[n]{z} \equiv (\sqrt[n]{z}\,)_0$ $(z \in \mathbb{R},\ z \geqslant 0)$ — неотрицательное действительное значение корня n-й степени из неотрицательного действительного числа (арифметический корень n-й степени);

$\sqrt[n]{z} \equiv (\sqrt[n]{z}\,)_l = -\sqrt[n]{|z|}$ $(z \in \mathbb{R},\ z < 0,\ n = 2l+1,\ l \in \mathbb{N})$ — действительное значение корня нечетной степени из отрицательного действительного числа.

5. Показательная многозначная функция с основанием a ($a \in \mathbb{C}$).

$F(z) = \{a^z\}_{\mathbb{C}}$.

Множество определения[17]: $V(F) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } a \neq 0; \\ \Omega, & \text{если } a = 0. \end{cases}$

$$f_0(z) = (a^z)_0 = \begin{cases} e^{z \ln a}, & \text{если } a \neq 0; \\ 0, & \text{если } a = 0 \text{ и } \operatorname{Re} z > 0; \\ 1, & \text{если } a = 0 \text{ и } z = 0. \end{cases}$$

$$f_k(z) = (a^z)_k = e^{z\,(\ln a)_k} \quad (k \neq 0).$$

Множество индексов:

$$K(z) = \begin{cases} [0\,..\,q-1], & \text{если } a \neq 0 \text{ и } z = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ и дробь } \dfrac{p}{q} \text{ несократима}; \\ \mathbb{Z}, & \text{если } a \neq 0 \text{ и } z \notin \mathbb{Q}; \\ \{0\}, & \text{если } a = 0 \text{ и } z \in \Omega. \end{cases}$$

Дополнительные символы:

$a^z \equiv (a^z)_0$ $(a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ z \in \mathbb{Z})$ — целая степень ненулевого комплексного числа;

$a^z \equiv (a^z)_0$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ z \in \mathbb{R})$ — положительное действительное значение степени с положительным действительным основанием и действительным показателем;

$a^z \equiv (a^z)_l = \sqrt[q]{a^p}$ $\left(a \in \mathbb{R},\ a < 0,\ z = \dfrac{p}{q}\right.$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима) — действительное значение степени с отрицательным действительным основанием и действительным показателем указанного вида;

$0^z \equiv (0^z)_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in \mathbb{R},\ z > 0; \\ 1, & \text{если } z = 0; \end{cases}$ — степень с нулевым основанием и неотрицательным действительным показателем.

6. Степенная многозначная функция с показателем α ($\alpha \in \mathbb{C}$).

$F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$.

[17] Символом Ω мы для краткости обозначаем множество $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\}$.

Множество определения: $V(F) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } \alpha \in \Omega; \\ \mathbb{C} \setminus \{0\}, & \text{если } \alpha \notin \Omega. \end{cases}$

$f_0(z) = (z^\alpha)_0 = \begin{cases} e^{\alpha \ln z}, & \text{если } z \neq 0; \\ 0, & \text{если } z = 0 \text{ и } \operatorname{Re}\alpha > 0; \\ 1, & \text{если } z = 0 \text{ и } \alpha = 0. \end{cases}$

$f_k(z) = (z^\alpha)_k = e^{\alpha\,(\ln z)_k} \quad (k \neq 0)$.

Множество индексов:

$K(z) = \begin{cases} [0\,..\,q-1], & \text{если } z \neq 0 \text{ и } \alpha = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ и дробь } \dfrac{p}{q} \text{ несократима}; \\ \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq 0 \text{ и } \alpha \notin \mathbb{Q}; \\ \{0\}, & \text{если } z = 0 \text{ и } \alpha \in \Omega. \end{cases}$

Дополнительные символы:

$z^\alpha \equiv (z^\alpha)_0$ ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$) — целая степень ненулевого комплексного числа;

$z^\alpha \equiv (z^\alpha)_0$ ($z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) — положительное действительное значение степени с положительным действительным основанием и действительным показателем;

$z^\alpha \equiv (z^\alpha)_l = \sqrt[q]{z^p}$ ($z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима) — действительное значение степени с отрицательным действительным основанием и действительным показателем указанного вида;

$0^\alpha \equiv (0^\alpha)_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0; \end{cases}$ — степень с нулевым основанием и неотрицательным действительным показателем.

7. Многозначный арккосинус[18]**.**

$F(z) = \operatorname{Arccos} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}$.

$f_0^{(1)}(z) = (\arccos z)_0^{(1)} \equiv \arccos z$.

[18] При составлении перечней функций (например, перечня основных производных, перечня основных неопределенных интегралов, перечня основных разложений в ряд Маклорена и т. д.) часто возникает вопрос: какую функцию приводить первой — косинус или синус. Авторы разных книг поступают по-разному. Мы считаем, что сначала надо приводить косинус, а затем синус. Для того чтобы обосновать эту рекомендацию, достаточно вспомнить определения косинуса и синуса. Косинус — это абсцисса (то есть первая координата) точки на числовой окружности. Синус — это ордината (то есть вторая координата) точки на числовой окружности. Что касается тангенса и котангенса, то сначала, по нашему мнению, надо приводить тангенс, поскольку котангенс вообще не определен в точке $x = 0$ и поэтому не разлагается в ряд Маклорена. Секанс и косеканс используются на практике реже, чем другие тригонометрические функции. Поэтому мы считаем правильным приводить их после других тригонометрических функций. При этом сначала следует приводить секанс (поскольку $\sec x = (\cos x)^{-1}$), а затем косеканс (поскольку $\operatorname{cosec} x = (\sin x)^{-1}$). Итак, мы считаем правильной и логичной следующую последовательность функций: косинус $\to$ $\to$ синус $\to$ тангенс $\to$ котангенс $\to$ секанс $\to$ косеканс. Для гиперболических функций, а также для обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций (или многозначных функций) следует для единообразия использовать аналогичную последовательность. В нашем перечне многозначных функций комплексной переменной и их значений последовательность обратных тригонометрических и обратных гиперболических многозначных функций соответствует описанной рекомендации.

$f_k^{(1)}(z) = (\arccos z)_k^{(1)} = \arccos z + 2\pi k.$
$f_k^{(2)}(z) = (\arccos z)_k^{(2)} = -\arccos z + 2\pi k.$

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}.$

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если} \quad z = \pm 1. \end{cases}$

8. Многозначный арксинус.

$F(z) = \operatorname{Arcsin} z.$

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}.$

$f_0^{(1)}(z) = (\arcsin z)_0^{(1)} \equiv \arcsin z.$

$f_k^{(1)}(z) = (\arcsin z)_k^{(1)} = \arcsin z + 2\pi k.$

$f_k^{(2)}(z) = (\arcsin z)_k^{(2)} = -\arcsin z + \pi + 2\pi k.$

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}.$

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если} \quad z = \pm 1. \end{cases}$

9. Многозначный арктангенс.

$F(z) = \operatorname{Arctg} z.$

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$

$f_0(z) = (\operatorname{arctg} z)_0 \equiv \operatorname{arctg} z.$

$f_k(z) = (\operatorname{arctg} z)_k = \operatorname{arctg} z + \pi k.$

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}.$

10. Многозначный арккотангенс.

$F(z) = \operatorname{Arcctg} z.$

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$

$f_0(z) = (\operatorname{arcctg} z)_0 \equiv \operatorname{arcctg} z.$

$f_k(z) = (\operatorname{arcctg} z)_k = \operatorname{arcctg} z + \pi k.$

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}.$

11. Многозначный арксеканс.

$F(z) = \operatorname{Arcsec} z.$

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arcsec} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arcsec} z.$

$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arcsec} z)_k^{(1)} = \operatorname{arcsec} z + 2\pi k.$

$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arcsec} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arcsec} z + 2\pi k.$

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}.$

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если } z = \pm 1. \end{cases}$

12. Многозначный арккосеканс.

$F(z) = \operatorname{Arccosec} z.$

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arccosec} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arccosec} z.$

$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arccosec} z)_k^{(1)} = \operatorname{arccosec} z + 2\pi k.$

$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arccosec} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arccosec} z + \pi + 2\pi k.$

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}.$

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если} \quad z = \pm 1. \end{cases}$

13. Многозначный ареакосинус гиперболический[19]**.**
$F(z) = \operatorname{Arch} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}$.
$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arch} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arch} z$.
$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arch} z)_k^{(1)} = \operatorname{arch} z + i \cdot 2\pi k$.
$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arch} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arch} z + i \cdot 2\pi k$.

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}$.

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если } z = \pm 1. \end{cases}$

14. Многозначный ареасинус гиперболический.
$F(z) = \operatorname{Arsh} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C}$.
$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arsh} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arsh} z$.
$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arsh} z)_k^{(1)} = \operatorname{arsh} z + i \cdot 2\pi k$.
$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arsh} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arsh} z + i\pi + i \cdot 2\pi k$.

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}$.

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq \pm i; \\ \varnothing, & \text{если } z = \pm i. \end{cases}$

15. Многозначный ареатангенс гиперболический.
$F(z) = \operatorname{Arth} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.
$f_0(z) = (\operatorname{arth} z)_0 \equiv \operatorname{arth} z$.
$f_k(z) = (\operatorname{arth} z)_k = \operatorname{arth} z + i \cdot \pi k$.

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}$.

---

[19] В названиях обратных гиперболических функций (или многозначных функций) иногда опускают слово “гиперболический”, то есть говорят, например, не “ареакосинус гиперболический” (или “многозначный ареакосинус гиперболический”), а просто “ареакосинус” (или “многозначный ареакосинус”). По нашему мнению, опускать слово “гиперболический” не следует. Дело в том, что первые части “арк” и “ареа” в названиях обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций (или многозначных функций), хотя они и произошли от разных слов (“арк” от английского слова arc — дуга, а “ареа” от английского слова area — площадь), имеют в данном случае одно и то же значение, а именно они означают “обратный”. Поэтому арккосинус — это функция, обратная к косинусу, а ареакосинус гиперболический — это функция, обратная к косинусу гиперболическому. В английском языке словосочетания “arc cosine” и “inverse cosine”, а также словосочетания “area hyperbolic cosine” и “inverse hyperbolic cosine” являются синонимами (английское слово “inverse” означает “обратный”). Поэтому в нашей статье в названиях обратных гиперболических функций (или многозначных функций) мы никогда не опускаем слово “гиперболический”. Так же поступают авторы ряда книг (см., например, [9, 14]).

Поскольку названия обратных тригонометрических функций (многозначных функций) начинаются с первой части “арк”, то их называют также аркфункциями (многозначными аркфункциями). Поскольку названия обратных гиперболических функций (многозначных функций) начинаются с первой части “ареа”, то их называют также ареафункциями (многозначными ареафункциями).

Отметим, что все гиперболические функции, все обратные гиперболические функции и все обратные гиперболические многозначные функции обозначаются с помощью последовательности букв латинского алфавита, заканчивающейся буквой “h” (ch, arch, Arch и т. д.). Это связано с тем, что буква “h” является первой буквой английского слова hyperbolic — гиперболический.

16. Многозначный ареакотангенс гиперболический.
$F(z) = \operatorname{Arcth} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.
$f_0(z) = (\operatorname{arcth} z)_0 \equiv \operatorname{arcth} z$.
$f_k(z) = (\operatorname{arcth} z)_k = \operatorname{arcth} z + i \cdot \pi k$.

Множество индексов: $K = \mathbb{Z}$.

17. Многозначный ареасеканс гиперболический.
$F(z) = \operatorname{Arsech} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arsech} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arsech} z$.
$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arsech} z)_k^{(1)} = \operatorname{arsech} z + i \cdot 2\pi k$.
$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arsech} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arsech} z + i \cdot 2\pi k$.

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}$.

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq \pm 1; \\ \varnothing, & \text{если } z = \pm 1. \end{cases}$

18. Многозначный ареакосеканс гиперболический.
$F(z) = \operatorname{Arcosech} z$.

Множество определения: $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
$f_0^{(1)}(z) = (\operatorname{arcosech} z)_0^{(1)} \equiv \operatorname{arcosech} z$.
$f_k^{(1)}(z) = (\operatorname{arcosech} z)_k^{(1)} = \operatorname{arcosech} z + i \cdot 2\pi k$.
$f_k^{(2)}(z) = (\operatorname{arcosech} z)_k^{(2)} = -\operatorname{arcosech} z + i\pi + i \cdot 2\pi k$.

Множество индексов первой серии значений: $K^{(1)} = \mathbb{Z}$.

Множество индексов второй серии значений: $K^{(2)}(z) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } z \neq \pm\, i; \\ \varnothing, & \text{если } z = \pm\, i. \end{cases}$

§ 6. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ПРЕДЛОЖЕННОЙ СИСТЕМЫ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Сделаем ряд замечаний относительно нашей системы обозначений и используемых нами терминов.

Замечание 1. Знаком $\equiv$ соединены символы, которые имеют одинаковые значения. Такие символы называются синонимами. Существование синонимов не противоречит принципу однозначности обозначений, поскольку он требует, чтобы каждому символу однозначно соответствовало обозначаемое им понятие, но не требует, чтобы для обозначения каждого понятия существовал лишь один символ. Наличие нескольких символов для обозначения одного и того же понятия позволяет использовать в данной ситуации тот из этих символов, который по каким-либо причинам является более удобным.

Например, символ e^z является более компактным, чем символ $(e^z)_0$. Однако, если показатель степени z задается каким-либо громоздким выражением, то более предпочтительным может оказаться символ $\exp z$. (Подробнее по поводу многозначной экспоненты $F(z) = \{e^z\}_{\mathbb{C}} = \operatorname{Exp} z$ и её главного значения $f(z) = (e^z)_0 = (\exp z)_0 = e^z = \exp z$ см. ниже, в частности, замечания 6, 15, 20.)

Замечание 2. Рассмотрим многозначную функцию $F(x,\,y) = \{x^y\}_{\mathbb{C}}$ двух комплексных переменных x и y. Эта многозначная функция имеет множество определения $V(F) = \{\langle x,\,y\rangle \in \mathbb{C}^2 \mid (x \neq 0) \vee (x = 0,\ y \in \Omega)\}$. Многозначную функцию $F(x,\,y)$ естественно называть термином “показательно-степенная многозначная функция”.

Если в многозначной функции $F(x,\,y)$ фиксировать[20] первую переменную x на значении a ($a \in \mathbb{C}$), то мы получим показательную многозначную

[20] Пусть $g(x,\,y)$ — функция двух числовых переменных и пусть $a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $h(y)$ такую, что $V(h) = \{y \in \mathbb{C} \mid \langle a,\,y\rangle \in V(g)\}$ и при всех $y \in V(h)$ справедливо равенство $h(y) = g(a,\,y)$. Переход от функции $g(x,\,y)$ к функции $h(y)$ называется фиксированием в функции $g(x,\,y)$ первой переменной x на значении a. Аналогично определяется действие фиксирования в функции $g(x,\,y)$ второй переменной y на значении a и вообще действие фиксирования в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) n переменных ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) любого упорядоченного набора переменных $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\rangle$ ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$; $k \in \mathbb{N}$, $k < n$) на любом упорядоченном наборе числовых значений $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$.

Иногда оказывается полезным действие фиксирования в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) n переменных ($n \in \mathbb{N}$) упорядоченного набора $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, состоящего сразу из всех n переменных, на упорядоченном наборе числовых значений $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Если упорядоченный набор $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ принадлежит множеству определения $V(f)$ ($V(F)$) функции f (многозначной функции F), то результатом этого действия, по определению, является число $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (множество $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$). Если упорядоченный набор $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ не принадлежит множеству определения $V(f)$ ($V(F)$) функции f (многозначной функции F), то результатом этого действия, по определению, является пустое множество $\varnothing$.

Действие фиксирования в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) n переменных ($n \in \mathbb{N}$) упорядоченного набора переменных $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\rangle$ ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$; $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$) на упорядоченном наборе числовых значений $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$ обозначается символом $\Big|_{\substack{x_{i_1}=a_1\\ \cdots\cdots\\ x_{i_k}=a_k}}$. В частности, символ $g(x,\,y)\big|_{x=a}$ обозначает функцию $h(y)$, которая получается в результате фиксирования в функции $g(x,\,y)$ переменной x на значении a, а символ $g(x,\,y)\Big|_{\substack{x=a\\ y=b}}$ обозначает число $g(a,\,b)$, если $\langle a,\,b\rangle \in V(g)$, и пустое множество $\varnothing$, если $\langle a,\,b\rangle \notin V(g)$.

Отметим, что фиксирование в функции $g(x,\,y)$ первой переменной x на значении a и сужение (см. § 3, определение 10) функции $g(x,\,y)$ на прямую $E = \{a\} \times \mathbb{C} = \{\langle x,\,y\rangle \in \mathbb{C}^2 \mid x = a\}$ — это разные действия. В результате первого действия получается функция $h(y)$ одной числовой переменной, то есть функция, определенная на подмножестве $V(h) = \{y \in \mathbb{C} \mid \langle a,\,y\rangle \in V(g)\}$ множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. В результате второго действия получается функция $g_1(x,\,y)$ двух числовых переменных, то есть функция, определенная на подмножестве $V(g_1) = V(g) \cap E$ пространства $\mathbb{C}^2$. Аналогичное замечание справедливо и в общем случае для функции (многозначной функции) n переменных.

Напомним (см. § 3, замечание 10), что действие сужения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) на множество E обозначается символом $\big|_E$. В частности, символ $g(x,\,y)\big|_{\{a\}\times\mathbb{C}}$ обозначает сужение функции $g(x,\,y)$ на прямую $E = \{a\} \times \mathbb{C} = \{\langle x,\,y\rangle \in \mathbb{C}^2 \mid x = a\}$, а символ $g(x,\,y)\big|_{\{\langle a,\,b\rangle\}}$ обозначает функцию, множество определения которой состоит из одной точки $\langle a,\,b\rangle$, если $\langle a,\,b\rangle \in V(g)$, и пустую функцию, если $\langle a,\,b\rangle \notin V(g)$.

Для полноты картины отметим, что наряду с фиксированием в функции переменной (переменных) и наряду с сужением функции на множество существует также такое действие, как замена переменных. Пусть дана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначная функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) n переменных ($n \in \mathbb{N}$) и пусть даны n функций $\varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $k \in [1\,..\,n]$, m переменных ($m \in \mathbb{N}$). Переход от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) к функции $f\big(\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m),\ \ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots,$

функцию с основанием a. Если в многозначной функции $F(x,\,y)$ фиксировать вторую переменную y на значении α ($\alpha \in \mathbb{C}$), то мы получим степенную многозначную функцию с показателем α.

При этом множество определения показательной многозначной функции с основанием a совпадает с множеством $\{y \in \mathbb{C} \mid \langle a,\,y\rangle \in V(F)\}$, а множество определения степенной многозначной функции с показателем α совпадает с множеством $\{x \in \mathbb{C} \mid \langle x,\,\alpha\rangle \in V(F)\}$.

Если числа x и y фиксированы, то множество $\{x^y\}_{\mathbb{C}}$ мы называем "множество всех значений степени с основанием x и показателем y".

При любых $\langle x,\,y\rangle \in V(F)$ справедливо равенство $\{x^y\}_{\mathbb{C}} = \{(x^y)_k \mid k \in$ $\in K(x,\,y)\}$, где $K(x,\,y)$ — множество индексов.

Функцию $f_k(x,\,y) = \left(x^y\right)_k$ мы называем "k-е значение показательно-степенной многозначной функции" (при $k=0$ слова "k-е значение" можно заменить на слова "главное значение"). Функция $f_k(x,\,y)$ имеет множество определения $V(f_k) = \{\langle x,\,y\rangle \in V(F) \mid k \in K(x,\,y)\}$.

Если числа x и y фиксированы, то число $\left(x^y\right)_k$ мы называем "k-е значение степени с основанием x и показателем y" (при $k=0$ слова "k-е значение" можно заменить на слова "главное значение").

Имеют место равенства:

$$f_0(x,\,y) = \left(x^y\right)_0 = \begin{cases} e^{y\ln x}, & \text{если } \ x \neq 0; \\ 0, & \text{если } \ x = 0 \ \text{ и } \ \operatorname{Re} y > 0; \\ 1, & \text{если } \ x = 0 \ \text{ и } \ y = 0; \end{cases}$$

$$f_k(x,\,y) = \left(x^y\right)_k = e^{y\,(\ln x)_k} \quad (k \neq 0).$$

Множество индексов $K(x,\,y)$ имеет вид:

$$K(x,y) = \begin{cases} [0\,..\,q-1], & \text{если } \ x \neq 0 \ \text{ и } \ y = \dfrac{p}{q}, \ \text{где } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \ \text{ и дробь } \dfrac{p}{q} \text{ несократима;} \\ \mathbb{Z}, & \text{если } \ x \neq 0 \ \text{ и } \ y \notin \mathbb{Q}; \\ \{0\}, & \text{если } \ x = 0 \ \text{ и } \ y \in \Omega. \end{cases}$$

Замечание 3. Многозначную функцию $F(z) = \{a^z\}_{\mathbb{C}}$ мы называем "показательная многозначная функция с основанием a". Функцию $f_k(z) = \left(a^z\right)_k$ мы называем "k-е значение показательной многозначной функции с основанием a" (при $k=0$ слова "k-е значение" можно заменить на слова "главное значение").

Если число z фиксировано, то множество $\{a^z\}_{\mathbb{C}}$ мы называем "множество всех значений степени с основанием a и показателем z". Число $\left(a^z\right)_k$ мы на-

---

$\ldots, \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)\big)$ (многозначной функции $F\big(\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m),\ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots,$ $\ldots, \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)\big)\big)$ называется заменой переменных. Говорят также о переходе от "старых" переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к "новым" переменным $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Действие замены в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (многозначной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на функции $\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, \varphi_n(y_1, y_2, \ldots,$ $\ldots, y_m)$ обозначается символом $\Bigg|_{\substack{x_1 \to \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n \to \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)}}$. Пусть, например, $R(x,\,y)$ — рациональная функция относительно двух переменных x и y. Если заменить в функции $R(x,\,y)$ переменную x на $\cos t$, а переменную y на $\sin t$, то мы получим функцию $f(t) =$ $= R(x,\,y)\Big|_{\substack{x \to \cos t \\ y \to \sin t}} = R(\cos t,\, \sin t)$. Функцию $f(t)$ называют рациональной функцией относительно функций $\cos t$ и $\sin t$.

зываем “k-е значение степени с основанием a и показателем z” (при $k = 0$ слова “k-е значение” можно заменить на слова “главное значение”).

Замечание 4. Многозначную функцию $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ мы называем “степенная многозначная функция с показателем α”. Функцию $f_k(z) = (z^\alpha)_k$ мы называем “k-е значение степенной многозначной функции с показателем α” (при $k = 0$ слова “k-е значение” можно заменить на слова “главное значение”).

Если число z фиксировано, то множество $\{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ мы называем “множество всех значений степени с основанием z и показателем α”. Число $(z^\alpha)_k$ мы называем “k-е значение степени с основанием z и показателем α” (при $k = 0$ слова “k-е значение” можно заменить на слова “главное значение”).

Замечание 5. Вместо распространенных терминов “общая показательная функция” и “общая степенная функция” мы используем термины “показательная многозначная функция” и “степенная многозначная функция”. Это связано с тем, что указанные математические объекты не являются функциями, а являются многозначными функциями.

Замечание 6. Многозначная экспонента $F(z) = \{e^z\}_{\mathbb{C}}$ — это многозначная функция, которая является частным случаем показательной многозначной функции с основанием a, когда $a = e$. Чаще всего в ТФКП встречается главная однозначная ветвь $f(z) = (e^z)_0$ этой многозначной функции.

Замечание 7. Рассмотрим степенную многозначную функцию с показателем α ($\alpha \in \mathbb{C}$), то есть многозначную функцию $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$. В этом замечании будем считать, что $\alpha \neq 0$ (случай $\alpha = 0$ рассмотрен ниже в замечании 8).

Во многих курсах ТФКП пишут, что многозначная функция $F(z)$ имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По нашему мнению, если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то исключение из множества определения многозначной функции $F(z)$ числа $z = 0$ является неправильным. Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то, по нашему мнению, следует считать, что $V(F) = \mathbb{C}$, причем $F(0) = \{0\}$. Приведем аргументы в пользу нашей точки зрения.

1. Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то, как легко доказать, при любом фиксированном k существует предел $\lim\limits_{z\to 0} (z^\alpha)_k = 0$. Это означает, что каждая из однозначных ветвей[21] $f_k(z) = (z^\alpha)_k$ многозначной функции $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ становится непрерывной в точке $z = 0$, если её доопределить в этой точке равенством $f_k(0) = 0$.

2. Из-за того что множества определения многозначных функций $F_1(z) = \{\sqrt[n]{z}\}_{\mathbb{C}}$ и $F_2(z) = \{z^{\frac{1}{n}}\}_{\mathbb{C}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) различны ($V(F_1) = \mathbb{C}$, $V(F_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$), возникает ненужное различие между этими функциями. Если доопределить многозначную функцию $F_2(z)$ в точке $z = 0$ равенством $F_2(0) = \{0\}$, то многозначный корень n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) станет частным случаем степенной многозначной функции с показателем α, когда $\alpha = \dfrac{1}{n}$.

[21] Мы считаем, что $k \in [0\,..\,q-1]$, если $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима; $k \in \mathbb{Z}$, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Отметим, что функция $f_k(z)$ определена при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а значит, действительно является однозначной ветвью многозначной функции $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. Степень с основанием 0 и показателем α определяется в школе (и в вузе при изучении действительного анализа) при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ (а иногда также при $\alpha = 0$). Непонятно, почему в ТФКП степень с основанием 0 и показателем α должна быть определена только при $\alpha \in \mathbb{N}$. Здесь нарушается не столько принцип преемственности математической символики, сколько принцип преемственности самих математических понятий (в данном случае понятия "степень").

Исходя из сказанного выше, мы будем считать, что степенная многозначная функция $F(z) = \{z^\alpha\}_\mathbb{C}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$) имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C}$, если $\operatorname{Re}\alpha > 0$ (при этом $F(0) = \{0\}$), и множество определения $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$.

Замечание 8. Рассмотрим степенную функцию с показателем $\alpha = 0$, то есть функцию $f(z) = z^\alpha = z^0$. При всех $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, справедливо равенство $f(z) = z^0 = 1$. По нашему мнению, целесообразно считать, что функция $f(z)$ определена не только при $z \neq 0$, но и при $z = 0$, причем $f(0) = 1$. Приведем аргументы в пользу нашей точки зрения.

1. Функция $f(z) = z^0$ становится непрерывной в точке $z = 0$, если её доопределить в этой точке равенством $f(0) = 1$.

2. В действительном (комплексном) анализе доказывается, что функция $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) дифференцируема при всех $x \in \mathbb{R}$ (при всех $x \in \mathbb{C}$). При этом справедлива следующая формула: $g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$. Для того чтобы эта формула была справедлива в точке $x = 0$ при $n = 1$, следует принять соглашение о том, что, по определению, $0^0 = 1$.

3. Если число 0^0 определено и равно 1, то определение комплексного многочлена степени N ($N \in \mathbb{N}$) можно записать в виде $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k x^k$, где $c_k \in \mathbb{C}$ при всех $k \in [0\,..\,N]$, $c_N \neq 0$. Действительно, определяемая этой формулой функция $P(x)$ имеет естественное множество определения над полем комплексных чисел $V_\mathbb{C}(P) = \mathbb{C}$. Если же символ 0^0 не определен, то функция $P(x)$ имеет естественное множество определения над полем комплексных чисел $V_\mathbb{C}(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а значит, не является многочленом. Для того чтобы функция $P(x)$ была многочленом, в этом случае придется использовать более длинную запись $P(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x^k$. Совершенно аналогичное замечание справедливо, разумеется, и по отношению к многочлену с действительными коэффициентами над полем действительных чисел.

Исходя из сказанного выше, мы будем считать, что степенная функция $f(z) = z^0$ имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C}$, причем $f(0) = 0^0 = 1$. Отметим, что именно так поступают некоторые авторы (см., например, [9]).

Соответственно, степенная многозначная функция $F(z) = \{z^0\}_\mathbb{C}$ тоже имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C}$, причем при всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $F(z) = \{1\}$.

Резюмируем содержание этого и предыдущего замечаний.

Если выполняется одно из условий $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\alpha = 0$ (иначе говоря, если $\alpha \in \Omega$), то мы считаем, что степенная многозначная функция $F(z) = \{z^\alpha\}_\mathbb{C}$ имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C}$. При этом, если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то $F(0) = \{0\}$, а если $\alpha = 0$, то $F(0) = \{1\}$.

Если ни одно из условий $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\alpha = 0$ не выполняется (иначе говоря, если $\alpha \notin \Omega$), то степенная многозначная функция $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Замечание 9. Если $\alpha = m \in \mathbb{Z}$, то степенная многозначная функция $F(z) = \{z^\alpha\}_{\mathbb{C}} = \{z^m\}_{\mathbb{C}}$ в каждой точке $z \in V(F)$ ($V(F) = \mathbb{C}$, если $m \geqslant 0$; $V(F) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $m < 0$) принимает ровно одно значение[22], а именно главное значение $(z^m)_0$.

Легко доказать, что при любом $m \in \mathbb{Z}$ и при любом $z \in V(F)$ число $(z^m)_0$ совпадает с тем значением степени с основанием z и показателем m, которое определяется в действительном и комплексном анализе как

$$z^m = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{m \text{ множителей}}, & \text{если } m > 0; \\ 1, & \text{если } m = 0; \\ \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z}}_{(-m) \text{ множителей}}, & \text{если } m < 0 \text{ и } z \neq 0. \end{cases}$$

(Если $m < 0$ и $z = 0$, то степень z^m не определена.)

В связи с этим символы z^m и $(z^m)_0$ ($m \in \mathbb{Z}$, $z \in V(F)$) в нашей системе обозначений являются синонимами.

Замечание 10. Если $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, то, как легко доказать, из всех значений $(x^y)_k$ степени с основанием[23] x и показателем y только одно значение, а именно главное значение $(x^y)_0$, будет действительным и положительным. Это значение совпадает с тем значением степени с основанием x и показателем y, которое используется в школе и в вузе при изучении действительного анализа и которое при $y \notin \mathbb{Q}$ часто определяется как предел

$$x^y = \lim_{n\to\infty} x^{r_n},$$

где r_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу y. В связи с этим символы x^y и $(x^y)_0$ ($x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$) в нашей системе обозначений являются синонимами.

Совершенно аналогичное замечание можно сделать относительно символов $\sqrt[n]{z}$ и $(\sqrt[n]{z})_0$ ($z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), которые в нашей системе обозначений тоже являются синонимами.

Замечание 11. Символы 0^y и $(0^y)_0$ ($y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 0$) являются синонимами. (Эти символы обозначают число 0, если $y > 0$, и число 1, если $y = 0$.)

Символы $\sqrt[n]{0}$ и $(\sqrt[n]{0})_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) тоже являются синонимами. (Эти символы обозначают число 0.)

[22] Если многозначная функция G на каждом элементе $a \in V(G)$ принимает ровно одно значение, то многозначная функция G имеет ровно одну однозначную ветвь. В частности, степенная многозначная функция $F(z) = \{z^m\}_{\mathbb{C}}$, $m \in \mathbb{Z}$, имеет ровно одну однозначную ветвь. Этой однозначной ветвью является главная однозначная ветвь $f(z) = (z^m)_0$.

[23] В замечаниях 10–12, 14 и 27 мы говорим о степени с основанием x и показателем y. Эти замечания в равной степени относятся к показательно-степенной многозначной функции (см. выше замечание 2), к показательной многозначной функции с основанием a ($a \in \mathbb{C}$) и к степенной многозначной функции с показателем α ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Замечание 12. Степень с основанием x ($x \in \mathbb{R}$) и показателем y ($y \in \mathbb{R}$, $y \notin \mathbb{Z}$) определяется в школе для $x \geqslant 0$, если $y > 0$, и для $x > 0$, если $y < 0$. Поэтому символ вида $(-8)^{\frac{2}{3}}$ в школе не имеет смысла. Однако во многих вузовских курсах математики степень x^y определяется также для $x < 0$ в том случае, если число y имеет вид $y = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима. А именно: $x^y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

Такое расширение понятия степени вполне обоснованно. Пусть, например, нам надо найти производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$. Записав функцию $f(x)$ в виде $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ (отметим, что такая запись справедлива при всех $x \in \mathbb{R}$), мы имеем возможность воспользоваться для нахождения производной функции $f(x)$ общей формулой[24] $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Имеем: $f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Итак, мы хотим, чтобы символ $(-8)^{\frac{2}{3}}$ обозначал число $\sqrt[3]{(-8)^2} = 4$. Это значение символ $(-8)^{\frac{2}{3}}$ должен иметь не только в действительном, но и в комплексном анализе (принцип преемственности обозначений). В то же время главное значение степени с основанием (-8) и показателем $\dfrac{2}{3}$ равно $e^{\frac{2}{3}\ln(-8)} = e^{\frac{2}{3}\ln 8 + i\,\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\,\frac{2\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3} \neq 4$. Следовательно, для обозначения главного значения степени с основанием x и показателем y мы, вообще говоря, не можем использовать символ x^y и должны использовать более сложный символ $\left(x^y\right)_0$. В противном случае был бы нарушен принцип однозначности обозначений.

Таким образом, символы x^y и $\left(x^y\right)_0$ в нашей системе обозначений, вообще говоря, не являются синонимами.

Замечание 13. Символ $\sqrt[3]{-8}$ обозначает в школе (и в вузе при изучении действительного анализа) число (-2). Это значение символ $\sqrt[3]{-8}$ должен сохранить при расширении системы обозначений (принцип преемственности обозначений). В то же время главное значение многозначного корня 3-й степени из числа (-8) равно $\sqrt[3]{|-8|}\; e^{i\,\frac{\arg(-8)}{3}} = 2\,e^{i\,\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \neq -2$. Следовательно, для обозначения главного значения многозначного корня n-й степени из числа z мы, вообще говоря, не можем использовать символ $\sqrt[n]{z}$ и должны использовать более сложный символ $\left(\sqrt[n]{z}\,\right)_0$. В противном случае был бы нарушен принцип однозначности обозначений.

[24] В курсах действительного анализа доказывается, что формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$, справедлива на открытом промежутке $(a,\, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ тогда и только тогда, когда на этом промежутке определена функция $x^{\alpha-1}$. В частности, если $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима, то формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ справедлива при всех $x \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, +\infty)$. Если, кроме того, $\alpha \geqslant 1$, то формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ справедлива также в точке $x = 0$. (Если $\alpha = 1$, то это обеспечивается тем, что мы считаем, что $0^0 = 1$.) Если $0 < \alpha < 1$, то функция x^α недифференцируема в точке $x = 0$. Если $\alpha < 0$, то функция x^α не определена в точке $x = 0$. Наконец, если $\alpha = 0$, то функция x^α при всех $x \in \mathbb{R}$ тождественно равна 1, поэтому $(x^\alpha)' = \left(x^0\right)' = 1' = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, символы $\sqrt[n]{z}$ и $(\sqrt[n]{z})_0$ в нашей системе обозначений, вообще говоря, не являются синонимами.

Замечание 14. Если $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, $y = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима, то, как легко доказать, из всех значений $(x^y)_k$ степени с основанием x и показателем y только одно значение, а именно l-е значение $(x^y)_l$, будет действительным. Это значение совпадает с тем значением степени с основанием x и показателем y, которое было определено в замечании 12 как $x^y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. В связи с этим символы x^y и $(x^y)_l$ ($x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, $y = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$, и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима) в нашей системе обозначений являются синонимами.

Совершенно аналогичное замечание можно сделать относительно символов $\sqrt[n]{z}$ и $(\sqrt[n]{z})_l$ ($z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, $n = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$), которые в нашей системе обозначений тоже являются синонимами.

Замечание 15. Если $z \in \mathbb{R}$, то, как следует из замечания 10, символы e^z и $(e^z)_0$ являются синонимами и обозначают одно и то же число. Ввиду важности той роли, которую в ТФКП играет главное значение $(e^z)_0$ многозначной экспоненты $\{e^z\}_{\mathbb{C}}$, сокращенное обозначение e^z для числа $(e^z)_0$ используют не только при $z \in \mathbb{R}$, но и при всех $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 16. Если $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, то, как легко доказать, из всех значений $(\ln z)_k$ многозначного логарифма числа z только одно значение, а именно главное значение $(\ln z)_0$, будет действительным. Это значение совпадает с тем значением логарифма числа z, которое используется в школе и в вузе при изучении действительного анализа и которое часто определяется как решение уравнения $e^w = z$ относительно w при фиксированном z.

В связи с этим символы $\ln z$ и $(\ln z)_0$ ($z \in \mathbb{R}$, $z > 0$) в нашей системе обозначений являются синонимами.

Ввиду важности той роли, которую в ТФКП играет главное значение $(\ln z)_0$ многозначного логарифма $\operatorname{Ln} z$, сокращенное обозначение $\ln z$ для числа $(\ln z)_0$ используют не только при $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, но и при всех $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 17. По причинам, аналогичным тем, которые были указаны в замечаниях 15 и 16, а также просто для упрощения символики в ТФКП используют сокращенные обозначения для главных значений и других многозначных функций.

Например, главное значение $(\arg z)_0$ многозначного аргумента $F(z) = \operatorname{Arg} z$ часто обозначают просто $\arg z$ ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$), главное значение $(\arccos z)_0^{(1)}$ многозначного арккосинуса $F(z) = \operatorname{Arccos} z$ часто обозначают просто $\arccos z$, причем это сокращенное обозначение используют не только при $z \in [1, 1]$, когда символ $(\arccos z)_0^{(1)}$ обозначает то же самое действительное число из промежутка $[0, \pi]$, что и известный из действительного анализа символ $\arccos z$, но и при всех $z \in \mathbb{C}$, и т. д.

Замечание 18. Наряду с символом e^z ($z \in \mathbb{C}$) иногда используют равносильный ему символ $\exp z$, который при записи некоторых формул может оказаться более удобным. Иначе говоря, символы e^z и $\exp z$ являются синонимами. Аналогичное замечание относится к символам $(e^z)_k$ и $(\exp z)_k$, а также к символам $\{e^z\}_{\mathbb{C}}$ и $\operatorname{Exp} z$, которые тоже являются синонимами.

Замечание 19. Функции (а если число z фиксировано, то числа) $\arg z$, $e^z = \exp z$, $\ln z$, $\arccos z$ и т. д., строго говоря, следовало бы называть "главное значение многозначного аргумента", "главное значение многозначной экспоненты", "главное значение многозначного логарифма", "главное значение многозначного арккосинуса" и т. д. Однако такие названия являются слишком длинными. Поэтому для этих функций (или чисел) используются более краткие названия: аргумент, экспонента, логарифм, арккосинус и т. д.

Это оправдано еще и потому, что сужения функций $e^z = \exp z$, $\ln z$, $\arccos z$ и т. д. на соответствующие множества действительных чисел совпадают с хорошо известными из школы (и из действительного анализа) функциями, которые в школе (и в действительном анализе) имеют именно эти краткие названия (экспонента, логарифм, арккосинус и т. д.).

Например, сужение функции $\ln z$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, на множество $(0, +\infty)$ представляет собой хорошо известную из школы функцию $\ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Поскольку функция $\ln x$, $x \in (0, +\infty)$, называется в школе "логарифм", то и функцию $\ln z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, естественно называть в ТФКП тоже "логарифм" (принцип преемственности терминологии).

Отметим, что функцию (а если число z фиксировано, то число) $(\sqrt[n]{z}\,)_0$ следует называть "главное значение многозначного корня n-й степени". Использовать более краткое название "корень n-й степени" в данном случае нельзя, так как это название используется для символа $\sqrt[n]{z}$, который, вообще говоря, обозначает число, отличное от числа $(\sqrt[n]{z}\,)_0$ (см. выше замечание 13).

Иначе говоря, сужение функции $(\sqrt[n]{z}\,)_0$, $z \in \mathbb{C}$, на множество действительных чисел $\mathbb{R}$ отличается от функции $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{R}$ (во всяком случае, если $n = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$). Поэтому функцию $(\sqrt[n]{z}\,)_0$ приходится называть длинным термином "главное значение многозначного корня n-й степени".

Аналогичное замечание относится к функциям $(a^z)_0$ и $(z^\alpha)_0$, для которых тоже приходится использовать длинные названия "главное значение показательной функции с основанием a" и "главное значение степенной функции с показателем α" (см. выше замечания 3 и 4).

Замечание 20. Функцию (а если число x фиксировано, то число) $e^x = \exp x$ $(x \in \mathbb{R})$ в школе и в вузе при изучении действительного анализа называют не только "экспонента x", но и "e в степени x". Последнее название является очень удобным и поэтому в ТФКП функцию (или число) $e^z = \exp z$ $(z \in \mathbb{C})$ называют не только "экспонента z", но и "e в степени z".

Замечание 21. Многозначные функции (а если число z фиксировано, то множества) $\operatorname{Arg} z$, $\{e^z\}_{\mathbb{C}} = \operatorname{Exp} z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arccos} z$ и т. д. следует называть "многозначный аргумент", "многозначная экспонента", "многозначный логарифм", "многозначный арккосинус" и т. д.

На практике в указанных словосочетаниях слово "многозначный" иногда опускают. По нашему мнению, опускать слово "многозначный" не следует, так как тогда исчезает различие между многозначной функцией и её главной однозначной ветвью. Например, многозначная функция $\operatorname{Arg} z$ называется "многозначный аргумент", а её главная однозначная ветвь $\arg z$ называется просто “аргумент” (см. выше замечание 19). В нашей статье мы в указанных словосочетаниях никогда не опускаем слово “многозначный”.

Многозначную функцию (а если число z фиксировано, то множество) $\{\sqrt[n]{z}\,\}_{\mathbb{C}}$ следует называть “многозначный корень n-й степени”. Опускать слово “многозначный” не следует, так как термин “корень n-й степени” используется для обозначения функции (или числа) $\sqrt[n]{z}$.

Аналогичное замечание относится к многозначным функциям $\{a^z\}_{\mathbb{C}}$ и $\{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ (о терминах, предлагаемых нами для этих многозначных функций, см. выше замечания 3 и 4).

Замечание 22. Символы $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Exp} z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arccos} z$ и т. д. часто читают “аргумент с большой буквы”, “экспонента с большой буквы”, “логарифм с большой буквы”, “арккосинус с большой буквы” и т. д. Мы предлагаем читать эти символы “многозначный аргумент”, “многозначная экспонента”, “многозначный логарифм”, “многозначный арккосинус” и т. д.

Например, формулу[25]

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

мы предлагаем читать так[26]: “многозначный логарифм z равен логарифм модуля z плюс i умножить на многозначный аргумент z”.

Замечание 23. Если число z фиксировано, то множество $\operatorname{Arg} z$ можно называть не только термином “многозначный аргумент”, но и более подробным термином “множество всех значений многозначного аргумента”. Аналогичное замечание относится и к другим многозначным функциям.

На практике в словосочетании вида “множество всех значений многозначного аргумента” слово “многозначный” иногда опускают. В данном случае такое опускание не может привести к ошибке, так как наличие предшествующих слов “множество всех значений” однозначно указывает на то, что речь идет именно о значениях многозначной функции. Тем не менее в нашей статье мы из методических соображений в словосочетаниях указанного вида никогда не опускаем слово “многозначный”.

Замечание 24. Функции (а если число z фиксировано, то числа) $(\arg z)_k$, $\{e^z\}_k = (\exp z)_k$, $(\ln z)_k$, $(\sqrt[n]{z}\,)_k$ и т. д., строго говоря, следует называть “k-е значение многозначного аргумента”, “k-е значение многозначной экспоненты”, “k-е значение многозначного логарифма”, “k-е значение многозначного корня n-й степени” и т. д. (при $k = 0$ слова “k-е значение” можно заменить на слова “главное значение”).

---

[25] Пусть $X \subset \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Произведением множества X на число λ (или произведением числа λ на множество X) называется множество $X\lambda = \lambda X = \{\lambda x \mid x \in X\}$. Суммой множества X и числа λ (или суммой числа λ и множества X) называется множество $X + \lambda = \lambda + X = \{x + \lambda \mid x \in X\}$.

[26] При чтении математических формул допускаются определенные отклонения от норм русского языка. В частности, по правилам русского языка после слова “равен” (“равна”, “равно”, “равны”) должен идти дательный падеж (“равен логарифму”). Однако при чтении математических формул допускается использование после этих слов именительного падежа, поскольку падежное согласование в косвенных падежах существенно затрудняет восприятие формулы слушателем.

На практике в указанных словосочетаниях слово “многозначный” иногда опускают. В данном случае такое опускание не может привести к ошибке, так как наличие предшествующих слов “k-е значение” или “главное значение” однозначно указывает на то, что речь идет именно о значениях многозначной функции. Тем не менее в нашей статье мы из методических соображений в указанных словосочетаниях никогда не опускаем слово “многозначный”.

Замечание 25. Функцию (а если число z фиксировано, то число) $(\arccos z)_k^{(1)}$ следует называть “k-е значение первой серии значений многозначного арккосинуса” (при $k = 0$ слова “k-е значение первой серии значений” можно заменить на слова “главное значение”). Функцию (или число) $(\arccos z)_k^{(2)}$ следует называть “k-е значение второй серии значений многозначного арккосинуса”. Аналогичные названия используются в случае многозначных функций $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arcsec} z$, $\operatorname{Arccosec} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arsech} z$, $\operatorname{Arcosech} z$.

На практике в указанных словосочетаниях слово “многозначный” иногда опускают. В данном случае такое опускание не может привести к ошибке, так как наличие предшествующих слов “k-е значение первой (второй) серии значений” или “главное значение” однозначно указывает на то, что речь идет именно о значениях многозначной функции. Тем не менее в нашей статье мы из методических соображений в указанных словосочетаниях никогда не опускаем слово “многозначный”.

Замечание 26. При всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ аргумент[27] $\arg z$ (или, что то же самое, мнимая часть логарифма $\operatorname{Im} \ln z$) принадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$. Веские доводы в пользу того, что разрез в комплексной плоскости, выделяющий главные однозначные ветви многозначных функций $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Ln} z$, $\{\sqrt[n]{z}\}_{\mathbb{C}}$ и др., следует проводить именно вдоль луча $(-\infty, 0]$, можно найти, например, в статье [15]. Существуют официальные стандарты, которые однозначно указывают на то, что аргумент $\arg z$ принадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$ (см., например, международный стандарт [16]). Следуя этим стандартам, все распространенные математические пакеты (Maple, Mathcad, Mathematica и др.) и языки программирования (C/C++, Fortran, Pascal и др.) выдают аргумент комплексного числа и мнимую часть логарифма комплексного числа именно в промежутке $(-\pi, \pi]$. В этой связи можно только выразить сожаление по поводу того, что авторы некоторых книг и учебников по ТФКП до сих пор пишут, что аргумент $\arg z$ принадлежит промежутку $[0, 2\pi)$.

Иногда приходится встречаться со следующим высказыванием: “Аргумент $\arg z$ комплексного числа z, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, можно брать в промежутке $(-\pi, \pi]$, в промежутке $[0, 2\pi)$ и вообще в любом промежутке вида $(a, a + 2\pi]$ или вида $[a, a+2\pi)$ $(a \in \mathbb{R})$ длины 2π. Выбор промежутка зависит от удобства решения данной конкретной задачи”. По нашему мнению, это высказывание является неправильным. Проще всего это аргументировать следующим образом. Главное значение многозначного арккосинуса $\arccos x$, $x \in [-1, 1]$ (для простоты мы ограничивается действительным случаем), можно тоже брать не только в

[27] Напомним, что слово “аргумент” является синонимом словосочетания “главное значение многозначного аргумента”, а слово “логарифм” является синонимом словосочетания “главное значение многозначного логарифма” (см. выше замечание 19).

промежутке $[0,\, \pi]$, но и в промежутке $[-\pi,\, 0]$, в промежутке $[\pi,\, 2\pi]$ и вообще в любом промежутке вида $[\pi k,\, \pi k+\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$. И тем не менее математики всего мира договорились понимать под символом $\arccos x$, $x \in [-1,\, 1]$, число из промежутка $[0,\, \pi]$. Это имеет то несомненное достоинство, что символ $\arccos x$, $x \in [-1,\, 1]$, в какой бы книге или статье он ни встретился, не требует специального пояснения. С символом $\arg z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ситуация, к сожалению, пока иная. Используя этот символ, автор книги или статьи должен специально указывать, понимает ли он под этим символом число из промежутка $(-\pi,\, \pi]$, число из промежутка $[0,\, 2\pi)$ или что-то другое. Такая ситуация, по нашему мнению, неприемлема, и следует приложить всяческие усилия для того, чтобы сделать символ $\arg z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, столь же однозначным, как и символ $\arccos x$, $x \in [-1,\, 1]$.

Если при решении данной конкретной задачи необходима однозначная ветвь $f(z)$ многозначного аргумента $\operatorname{Arg} z$, принимающая значения в промежутке $[0,\, 2\pi)$, то достаточно просто написать $f(z) = \operatorname{Arg} z \cap [0,\, 2\pi)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Однозначную ветвь $f(z)$ можно также выделить с помощью следующих трех условий: 1) $f(1) = 0$; 2) функция $f(z)$ непрерывна на множестве $\mathbb{C} \setminus$ $\setminus [0,\, +\infty)$; 3) функция $f(z)$ непрерывна на множестве[28] $\{\operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Третье условие означает, что функция $f(z)$ непрерывна на "верхнем берегу" луча $(0,\, +\infty)$.

При желании однозначную ветвь $f(z)$ можно выразить через главную однозначную ветвь $\arg z$ многозначного аргумента $\operatorname{Arg} z$:

$$f(z) = \begin{cases} \arg z, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{0\}; \\ \arg z + 2\pi, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z < 0\}. \end{cases}$$

Для любой однозначной ветви $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ существует, и притом единственная, целозначная[29] функция $k(z)$ такая, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо равенство $f(z) = (\arg z)_{k(z)}$. В случае рассматриваемой однозначной ветви $f(z)$, принимающей значения в промежутке $[0,\, 2\pi)$, целозначная функция $k(z)$ имеет вид:

$$k(z) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{0\}; \\ 1, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z < 0\}. \end{cases}$$

Замечание 27. Символ $(x^y)_k$ $\left(x \in \mathbb{C},\ x \neq 0,\ y = \dfrac{p}{q}\right.$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима) можно использовать не только при $k \in [0\,..\,q-1]$,

[28] Для краткости вместо обозначения вида $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ мы используем обозначение $\{\operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

[29] Мы называем функцию g целозначной, если $W(g) \subset \mathbb{Z}$. Термин "целозначная функция" полностью аналогичен широко распространенным терминам "комплекснозначная функция" и "действительнозначная функция".

Отметим, что, строго говоря, любая функция g является комплекснозначной, поскольку $W(g) \subset \mathbb{C}$ (см. § 3, замечание 5). Выражение "комплекснозначная функция g" обычно используется для того, чтобы подчеркнуть, что функция g может принимать не только действительные, но и комплексные значения, то есть что включение $W(g) \subset \mathbb{R}$, вообще говоря, не имеет места.

но и при других целых значениях k. При этом следует иметь в виду, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(x^y)_k = (x^y)_{k_1}$, где[30] $k \equiv k_1 \pmod{q}$, $k_1 \in [0\,..\,q-1]$. (Иначе говоря, k_1 — это остаток от деления числа k на число q.)

Символ $(0^y)_k$ $(y \in \Omega)$ можно использовать не только при $k = 0$, но и при других целых значениях k. При этом следует иметь в виду, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$(0^y)_k = (0^y)_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \operatorname{Re} y > 0; \\ 1, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases}$$

Замечание 28. Символ $(\sqrt[n]{z}\,)_k$ $(z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$ можно использовать не только при $k \in [0\,..\,n-1]$, но и при других целых значениях k. При этом следует иметь в виду, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(\sqrt[n]{z}\,)_k = (\sqrt[n]{z}\,)_{k_1}$, где $k \equiv k_1 \pmod{n}$, $k_1 \in [0\,..\,n-1]$. (Иначе говоря, k_1 — это остаток от деления числа k на число n.)

Символ $(\sqrt[n]{0}\,)_k$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$ можно использовать не только при $k = 0$, но и при других целых значениях k. При этом следует иметь в виду, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(\sqrt[n]{0}\,)_k = (\sqrt[n]{0}\,)_0 = 0$.

Замечание 29. Символы $(\arccos 1)_k^{(j)}$ и $(\arccos(-1))_k^{(j)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ можно использовать не только при $j = 1$, но и при $j = 2$. При этом следует иметь в виду, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства $(\arccos 1)_k^{(2)} = (\arccos 1)_k^{(1)} = 2\pi k$, $\big(\arccos(-1)\big)_k^{(2)} = \big(\arccos(-1)\big)_{k-1}^{(1)} = -\pi + 2\pi k$. (Иначе говоря, в точках $z = \pm 1$ вторая серия значений многозначного арккосинуса совпадает с первой серией значений.)

Аналогичное замечание относится к символам $(\arcsin 1)_k^{(j)}$, $\big(\arcsin(-1)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arcsec} 1)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arcsec}(-1)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arccosec} 1)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arccosec}(-1)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arch} 1)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arch}(-1)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arsh} i)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arsh}(-i)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arsech} 1)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arsech}(-1)\big)_k^{(j)}$, $(\operatorname{arcosech} i)_k^{(j)}$, $\big(\operatorname{arcosech}(-i)\big)_k^{(j)}$ $(k \in \mathbb{Z})$, которые тоже можно использовать не только при $j = 1$, но и при $j = 2$ (хотя в указанных точках вторая серия значений многозначной функции совпадает с первой серией значений).

Замечание 30. Возможно, k-е значение многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ логичнее было бы обозначать не символом $(\arg z)_k$, а символом $(\operatorname{Arg} z)_k$ (при этом для главного значения $(\operatorname{Arg} z)_0$ можно использовать также сокращенное обозначение $\arg z$). Действительно, поскольку символ $\arg z$ обозначает главное значение многозначного аргумента, то символ $(\arg z)_k$, если его воспринять буквально, можно понять как “k-е значение главного значения многозначного аргумента”, что является абсурдом.

Тем не менее в нашей системе обозначений для обозначения k-го значения многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ мы используем символ $(\arg z)_k$, а не символ $(\operatorname{Arg} z)_k$. При этом мы придерживаемся следующего соглашения: символ, в состав которого входит последовательность латинских букв, начинающаяся со строчной буквы, обозначает функцию (а если число z фиксировано,

[30] Запись $x \equiv y \pmod{m}$, где $x,\ y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, означает, что существует целое число $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $x - y = pm$. Запись $x \equiv y \pmod{m}$ называется сравнением и читается “x сравнимо с y по модулю m”.

то число); символ, в состав которого входит последовательность латинских букв, начинающаяся с прописной буквы, обозначает многозначную функцию (а если число z фиксировано, то множество). Это соглашение, по нашему мнению, является очень удобным, поскольку оно способствует более быстрому зрительному восприятию текста. Таким образом, выбирая между символами $(\arg z)_k$ и $(\operatorname{Arg} z)_k$, мы в нашей системе обозначений сделали выбор в пользу символа $(\arg z)_k$.

Совершенно аналогичное замечание можно сделать относительно символов $(\exp z)_k$, $(\ln z)_k$, $(\arccos z)_k^{(j)}$ и т. д.

Замечание 31. Использование в символах $\{e^z\}_{\mathbb{C}}$, $\{\sqrt[n]{z}\}_{\mathbb{C}}$, $\{a^z\}_{\mathbb{C}}$, $\{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$ фигурных скобок связано с тем, что эти символы обозначают множества, а множества в математике традиционно обозначаются фигурными скобками (принцип мотивированности обозначений). Наличие в каждом из этих символов буквы $\mathbb{C}$ подчеркивает, что речь идет о множестве всех комплексных значений соответствующей многозначной функции. Опустить букву $\mathbb{C}$ нельзя, так как тогда будет нарушен принцип однозначности обозначений. Символ $\{\sqrt{4}\}$ обозначает одноэлементное множество $\{2\}$ (поскольку $\sqrt{4} = 2$), тогда как символ $\{\sqrt{4}\}_{\mathbb{C}}$ обозначает двухэлементное множество $\{\pm 2\}$.

Замечание 32. Символы $(\arg z)_k$, $(\exp z)_k$, $(x^y)_k$, $\{x^y\}_{\mathbb{C}}$ и т. д. следует воспринимать как единые символы. Иначе говоря, если в каком-либо месте текста встретится символ вида $(A)_k$ или вида $\{A\}_{\mathbb{C}}$, где A — некоторое выражение, то выражение A нельзя рассматривать изолированно от его окружения (то есть изолированно от символов $(\ldots)_k$ или от символов $\{\ldots\}_{\mathbb{C}}$). В частности, выражение A нельзя, вообще говоря, заменить на равное ему выражение B, поскольку такая замена может привести к абсурду.

Например, символ $(\arg i)_1$ обозначает число $\dfrac{5\pi}{2}$. Если же в этом символе заменить $\arg i$ на $\dfrac{\pi}{2}$, то мы получим не имеющий смысла символ $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)_1$. Символ $\{4^{1/2}\}_{\mathbb{C}}$ обозначает множество $\{\pm 2\}$. Если же в этом символе заменить $4^{1/2}$ на 2, то мы получим не имеющий смысла символ $\{2\}_{\mathbb{C}}$.

Замечание 33. Рассмотрим на примере многозначной функции "многозначный арккосинус", как определяются обратные тригонометрические и обратные гиперболические многозначные функции и их главные значения.

Уравнение $\cos w = z$ относительно w при фиксированном z, как легко доказать, имеет решения при всех $z \in \mathbb{C}$. Введем следующее обозначение:

$$\operatorname{Arccos} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z\} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Многозначная функция $F(z) = \operatorname{Arccos} z$ (многозначный арккосинус) имеет множество определения $V(F) = \mathbb{C}$ и является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.

Функция $f(z) = \arccos z$ (главное значение многозначного арккосинуса, или просто арккосинус) является однозначной ветвью многозначной функции $F(z)$. Функция $f(z)$ регулярна[31] (а потому непрерывна) в области $\mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big)$. В точках $z = \pm 1$ функция $f(z)$ непрерывна, но не

[31] Вместо термина "регулярная функция" в некоторых книгах используется термин "однозначная аналитическая функция". Отметим, что слово "однозначная" здесь является явно

регулярна. Кроме того, функция $f(z)$ непрерывна на множествах $\{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$. Это означает, что функция $f(z)$ непрерывна на "верхнем берегу" луча $(-\infty, -1)$ и на "нижнем берегу" луча $(1, +\infty)$.

Важно отметить, что при $z \in [-1, 1]$ функция $f(z)$ принимает действительные значения, принадлежащие отрезку $[0, \pi]$, то есть символ $\arccos z$, $z \in [-1, 1]$, обозначает то же число, что и в школе (принцип преемственности обозначений).

Функция $f(z)$ биективно отображает множество $V(f) = \mathbb{C}$ на множество $W(f) = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \cup \{\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = \pi, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$.

При всех $z \in \mathbb{C}$ справедлива следующая формула, связывающая главные значения трех многозначных функций (многозначный логарифм, многозначный корень 2-й степени и многозначный арккосинус):

$$\arccos z = -2i \ln \left[\left(\sqrt{\frac{1+z}{2}} \right)_0 + i \left(\sqrt{\frac{1-z}{2}} \right)_0 \right].$$

Эта формула взята нами из статьи [15].

Замечание 34. Рассмотрим определения многозначных функций "многозначный арккосинус" и "многозначный ареакосинус гиперболический":

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z\} \quad (z \in \mathbb{C}); \\ \operatorname{Arch} z &= \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} w = z\} \quad (z \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Из ТФКП известно, что при любом $x \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $\operatorname{ch}(ix) = \cos x$. Если $x \in \operatorname{Arccos} z$, то $\cos x = z$, а значит, $\operatorname{ch}(ix) = \cos x = z$. Отсюда следует, что $ix \in \operatorname{Arch} z$.

Итак, для любого числа $x \in \operatorname{Arccos} z$ число ix принадлежит множеству $\operatorname{Arch} z$. Это означает, что справедливо включение $(i \operatorname{Arccos} z) \subset \operatorname{Arch} z$. Аналогично доказывается обратное включение $(i \operatorname{Arccos} z) \supset \operatorname{Arch} z$. Следовательно, имеет место равенство множеств $\operatorname{Arch} z = i \operatorname{Arccos} z$ $(z \in \mathbb{C})$.

При любом $z \in \mathbb{C}$ число $\arccos z$ (главное значение арккосинуса, или просто арккосинус) принадлежит множеству $\operatorname{Arccos} z$, а число $\operatorname{arch} z$ (главное значение ареакосинуса гиперболического, или просто ареакосинус гиперболический) принадлежит множеству $\operatorname{Arch} z$. Иначе говоря, $\arccos z \in \operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{arch} z \in \operatorname{Arch} z$.

Множества $\operatorname{Arccos} z$ и $\operatorname{Arch} z$ связаны соотношением $\operatorname{Arch} z = i \operatorname{Arccos} z$. Можно ли утверждать, что числа $\arccos z$ и $\operatorname{arch} z$ связаны аналогичным соотношением, то есть что $\operatorname{arch} z = i \arccos z$?

Оказывается, что это простое равенство не верно и главные значения многозначных функций $\operatorname{Arccos} z$ и $\operatorname{Arch} z$ связаны более сложным равенством

$$\operatorname{arch} z = \begin{cases} i \arccos z, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z > 0\} \cup (-\infty, 1]; \\ -i \arccos z, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z < 0\} \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

лишним, поскольку функция по самому своему определению является "однозначной". Можно было бы использовать термин "аналитическая функция", однако для большей четкости терминологии мы используем вместо него термин "регулярная функция", чтобы сделать более явным различие между понятиями "аналитическая функция" и "аналитическая многозначная функция".

О том, почему это так, а также о том, как определяются и как связаны между собой главные значения различных многозначных арк- и ареафункций, можно прочитать в статье [15]. К сожалению, насколько нам известно, этот вопрос не освещен в существующей литературе на русском языке.

Замечание 35. Команды, встроенные во все распространенные математические пакеты (Maple, Mathcad, Mathematica и др.) и языки программирования (C/C++, Fortran, Pascal и др.), выдают именно то главное значение, которое указано в нашей статье для каждой многозначной функции.

Рассмотрим в качестве примера математический пакет Maple.

Команда[32] `argument(-1-I)` выдает $-\dfrac{3}{4}\pi$, то есть главное значение многозначного аргумента числа $(-1-i)$. Команда `ln(-I)` выдает $\dfrac{-1}{2}I\pi$, то есть главное значение многозначного логарифма числа $(-i)$. Команда `root[3](-8.0)` выдает[33] $1.000000000+1.732050808\,I$, то есть главное значение $(\sqrt[3]{-8}\,)_0 = 1+i\sqrt{3}$ многозначного корня 3-й степени из числа (-8). Команда `evalf(I^I)` выдает $.2078795764+0.\,I$, то есть главное значение $(i^i)_0 = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2}$ степени с основанием i и показателем i. Команда `arccos(2)` выдает $1.316957897\,I$, то есть главное значение $(\arccos 2)_0^{(1)} = \arccos 2 = i\ln(2+\sqrt{3}\,)$ многозначного арккосинуса числа 2. И т. д.

§ 7. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОЙ СИСТЕМЫ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пример 1. Вернемся еще раз к задаче 13.70 из части 3 задачника [3], которую мы уже упоминали в § 2 нашей статьи.

Прежде всего заметим, что условие этой задачи, по нашему мнению, следовало бы сформулировать так: “Выразить многозначную функцию $\operatorname{Arcsin} z$ через многозначные функции $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt{z}\,\}_{\mathbb{C}}$. Записать в алгебраической форме все значения многозначной функции $\operatorname{Arcsin} z$ в точке $z = i$”.

С использованием предлагаемых нами обозначений формула, выражающая многозначный арксинус через многозначный логарифм и многозначный корень 2-й степени, запишется в виде[34]

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\Big(iz \pm \big(\sqrt{1-z^2}\,\big)_0\Big) \quad (z\in\mathbb{C}).$$

Здесь символ $(\sqrt{1-z^2}\,)_0$ обозначает главное значение многозначного корня 2-й степени из числа $1-z^2$. При такой записи не может возникнуть ошибок, связанных с неправильным истолкованием символа $\sqrt{1-z^2}$.

Ответ ко второй части задачи можно записать, например, так[35]:

$$\operatorname{Arcsin} i = \{2\pi k + i\ln(\sqrt{2}+1) \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}+1) \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

---

[32] В пакете Maple прописная латинская буква I служит для обозначения мнимой единицы.

[33] В пакете Maple при записи десятичных дробей целая часть отделяется от дробной части с помощью точки. Если целая или дробная часть равна 0, то эта часть иногда просто опускается.

[34] Символ $\operatorname{Ln}(x\pm y)$ $(x,\ y\in\mathbb{C},\ x\neq \pm y)$ обозначает объединение множеств $\operatorname{Ln}(x+y)$ и $\operatorname{Ln}(x-y)$, то есть $\operatorname{Ln}(x\pm y) = \operatorname{Ln}(x+y)\cup\operatorname{Ln}(x-y)$.

[35] Мы учли, что $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ и поэтому $\ln(\sqrt{2}-1) = -\ln(\sqrt{2}+1)$.

Пример 2. Рассмотрим квадратное уравнение $az^2+bz+c=0$ ($a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$). Формула для корней этого уравнения имеет следующий вид:

$$z_{1,\,2} = \frac{-b \pm (\sqrt{D}\,)_0}{2a}\,, \quad \text{где} \quad D = b^2 - 4ac.$$

Здесь символ $(\sqrt{D}\,)_0$ обозначает главное значение многозначного корня 2-й степени из числа D.

Пример 3. Из школы хорошо известно следующее свойство степени:

$$z_1^\alpha z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha \quad (z_1,\ z_2,\ \alpha \in \mathbb{R};\ \ z_1,\ z_2 > 0).$$

Легко доказать, что это свойство остается справедливым и для множеств всех значений степеней. А именно справедливо следующее равенство[36]:

$$\{z_1^\alpha\}_{\mathbb{C}}\,\{z_2^\alpha\}_{\mathbb{C}} = \bigl\{(z_1 z_2)^\alpha\bigr\}_{\mathbb{C}} \quad (z_1,\ z_2,\ \alpha \in \mathbb{C};\ \ z_1,\ z_2 \neq 0).$$

В то же время для главных значений степеней аналогичное равенство, вообще говоря, не имеет места, то есть в общем случае

$$(z_1^\alpha)_0\,(z_2^\alpha)_0 \neq \bigl((z_1 z_2)^\alpha\bigr)_0 \quad (z_1,\ z_2,\ \alpha \in \mathbb{C};\ \ z_1,\ z_2 \neq 0).$$

Например, если $z_1 = z_2 = -1$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, то

$$(z_1^\alpha)_0\,(z_2^\alpha)_0 = \bigl((-1)^{\frac{1}{2}}\bigr)_0\,\bigl((-1)^{\frac{1}{2}}\bigr)_0 = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)}\,e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = e^{i\,\frac{\pi}{2}}\,e^{i\,\frac{\pi}{2}} = i \cdot i = -1,$$

тогда как

$$\bigl((z_1 z_2)^\alpha\bigr)_0 = \bigl(1^{\frac{1}{2}}\bigr)_0 = e^{\frac{1}{2}\ln 1} = e^0 = 1.$$

Пример 4. Рассмотрим еще одно известное из школы свойство степени, а именно:

$$a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2} \quad (a,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{R};\ \ a > 0).$$

Легко доказать, что для множеств всех значений степеней это равенство, вообще говоря, не имеет места и можно утверждать лишь, что

$$\{a^{z_1}\}_{\mathbb{C}}\,\{a^{z_2}\}_{\mathbb{C}} \supset \{a^{z_1+z_2}\}_{\mathbb{C}} \quad (a,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C};\ \ a \neq 0).$$

В то же время для главных значений степеней равенство сохраняется:

$$(a^{z_1})_0\,(a^{z_2})_0 = (a^{z_1+z_2})_0 \quad (a,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C};\ \ a \neq 0).$$

Отметим, что в примерах 3 и 4 использование символов $(z^\alpha)_0$, $\{z^\alpha\}_{\mathbb{C}}$, $(a^z)_0$, $\{a^z\}_{\mathbb{C}}$ позволило нам записать целый ряд формул в ясном и легко воспринимаемом виде.

Пример 5. В задачниках по ТФКП часто встречаются задачи типа: “Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$ (степени $(1+i)^i$)”. С использованием предлагаемых нами обозначений эту задачу можно сформулировать, например, так:

[36] Произведением множеств X и Y ($X,\ Y \subset \mathbb{C}$) называется множество $XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists\, x \in X)\,(\exists\, y \in Y)\colon z = xy\}$.

"Записать в алгебраической (тригонометрической, показательной) форме все элементы множества $\{\sqrt[3]{i}\}_{\mathbb{C}}$ (множества $\{(1+i)^i\}_{\mathbb{C}}$)".

Пример 6. Аналитическая многозначная функция $F(z) = \{\sqrt{1-z^2}\}_{\mathbb{C}}$, как легко доказать, распадается в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ на две регулярные однозначные ветви. Пусть $f(z)$ — та из этих однозначных ветвей, которая на "верхнем берегу" интервала $(-1, 1)$ принимает положительные действительные значения[37].

Несложно установить следующую связь между однозначной ветвью $f(z)$ и однозначными ветвями $(\sqrt{1-z^2})_0$, $(\sqrt{1-z^2})_1$ многозначной функции $F(z)$:

$$f(z) = \begin{cases} (\sqrt{1-z^2})_0, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z > 0\} \cup (-\infty, -1); \\ (\sqrt{1-z^2})_1, & \text{если} \quad z \in \{\operatorname{Im} z < 0\} \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Пример 7. Пусть $F(z)$ — многозначная функция, определенная в области $D \subset \mathbb{C}$, и пусть $\Gamma = [z = \varphi(t);\ t \in [a, b];\ t\uparrow]$ — кусочно-гладкая кривая[38], целиком лежащая в области D и ориентированная в направлении возрастания

---

[37] Поскольку, строго говоря, функция $f(z)$ не определена в точках отрезка $[-1, 1]$, то точнее было бы сказать, что регулярная однозначная ветвь $f(z)$ выделяется условием $\lim\limits_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$. Здесь символ $\sqrt{1-x^2}$ обозначает, в соответствии с нашей системой обозначений, арифметический квадратный корень.

[38] Неориентированная кривая Γ — это непрерывное отображение некоторого промежутка $X \subset \mathbb{R}$ в некоторое топологическое пространство T (в нашем случае $T = \mathbb{C}$). Обозначение: $\Gamma = [y = f(x);\ x \in X]$. Множество значений отображения Γ, то есть множество $W(\Gamma) = \{y \in T \mid (\exists\, x \in X)\colon y = f(x)\}$, называется носителем кривой Γ.

Пусть Γ — неориентированная кривая. Упорядоченная пара $\langle \Gamma, \uparrow \rangle$ называется кривой, ориентированной в направлении возрастания параметра x. Обозначение: $[y = f(x);\ x \in X;\ x\uparrow]$. Упорядоченная пара $\langle \Gamma, \downarrow \rangle$ называется кривой, ориентированной в направлении убывания параметра x. Обозначение: $[y = f(x);\ x \in X;\ x\downarrow]$. Ориентированную кривую мы для краткости будем обозначать той же буквой Γ, что и соответствующую неориентированную кривую.

В упорядоченных парах $\langle \Gamma, \uparrow \rangle$ и $\langle \Gamma, \downarrow \rangle$ стрелки $\uparrow$ и $\downarrow$ — это просто некоторые символы. В принципе, вместо этих символов можно было бы использовать, скажем, числа 1 и (-1).

В приведенных выше обозначениях кривой Γ буква f обозначает то же самое отображение, что и буква Γ, то есть $V(f) = V(\Gamma) = X$, $f(x) = \Gamma(x)$ при всех $x \in X$. (Иначе говоря, символы f и Γ являются синонимами.) Из чисто практических соображений оказывается удобным иметь две разные буквы для обозначения одного и того же отображения.

Если кривая Γ ориентирована в направлении возрастания параметра x, $\Gamma = [y = f(x);\ x \in X;\ x\uparrow]$, и $a = \inf X \in X$ ($b = \sup X \in X$), то точка $f(a)$ ($f(b)$) называется началом (концом) кривой Γ. Если же $a = \inf X \notin X$ ($b = \sup X \notin X$), то говорят, что кривая Γ не имеет начала (конца). Если кривая Γ ориентирована в направлении убывания параметра x, то в приведенных определениях надо поменять местами слова "начало" и "конец".

Если отображение Γ является инъективным, то кривая Γ называется простой незамкнутой кривой. Если $V(\Gamma) = [a, b]$, $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ и сужения отображения Γ на множества $[a, b)$ и $(a, b]$ являются инъективными, то кривая Γ называется простой замкнутой кривой. Если кривая Γ является простой незамкнутой или простой замкнутой кривой, то кривая Γ называется простой кривой.

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ — простые кривые, причем при любых $i, j \in [1\,..\,n]$, $i \neq j$, носители $W(\Gamma_i)$ и $W(\Gamma_j)$ имеют не более конечного числа общих точек. Объединение C носителей кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, а также, возможно, конечного числа точек называется линией. Пустое множество, по определению, тоже является линией. При таком понимании понятия линии совершенно законным является использование термина "линия второго порядка" по отношению к таким множествам, как гипербола ($x^2 - y^2 = 1$), пара параллельных прямых параметра t. Пусть $z_0 = \varphi(a)$ — начало, а $z_1 = \varphi(b)$ — конец кривой Γ, и пусть $A \in F(z_0)$ — одно из значений многозначной функции $F(z)$ в точке z_0.

Достаточно часто встречается ситуация, когда существует единственная непрерывная функция $f(t)$, $t \in [a,\, b]$, такая, что $f(a) = A$ и $f(t) \in F(\varphi(t))$ при всех $t \in [a,\, b]$. Пусть $f(b) = B$.

Поскольку $f(t) \in F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ при всех $t \in [a,\, b]$, то $B = f(b) \in F\bigl(\varphi(b)\bigr) = F(z_1)$. Будем говорить, что значение B многозначной функции $F(z)$ в точке z_1 получено в результате непрерывного продолжения вдоль кривой Γ значения A многозначной функции $F(z)$ в точке z_0. Для обозначения числа B будем использовать символ[39] $[F(z),\, A]_\Gamma$. Таким образом, $[F(z),\, A]_\Gamma = B$.

Если многозначная функция $F(z)$ является аналитической, то будем требовать, чтобы значение B получалось в результате не просто непрерывного, а аналитического продолжения значения[40] A вдоль кривой Γ.

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, и пусть Γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, начинающаяся и заканчивающаяся в точке z_0 и ориентированная против часовой стрелки. Пусть[41] $0 \in D^{(i)}(\Gamma)$.

Легко доказать, что справедливы следующие формулы:

$$[\operatorname{Arg} z,\, (\arg z_0)_k\,]_\Gamma = (\arg z_0)_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$[\operatorname{Ln} z,\, (\ln z_0)_k\,]_\Gamma = (\ln z_0)_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$[\{\sqrt[n]{z}\,\}_{\mathbb{C}},\, (\sqrt[n]{z_0}\,)_k\,]_\Gamma = \begin{cases} \bigl(\sqrt[n]{z_0}\,\bigr)_{k+1}, & \text{если } \ k \in [0\,..\,n-2]; \\ \bigl(\sqrt[n]{z_0}\,\bigr)_0, & \text{если } \ k = n-1. \end{cases}$$

Если считать известным тот факт, что многозначные функции $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\,\}_{\mathbb{C}}$ являются аналитическими в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а также тот факт, что элементы этих многозначных функций в точке z_0 однозначно определяются

$(x^2 = 1)$, точка $(x^2 + y^2 = 0)$, пустое множество $(x^2 + y^2 = -1)$ и др. Что касается термина “кривая второго порядка”, то его мы предлагаем не использовать.

В простейшем и наиболее важном случае линия C — это носитель $W(\Gamma)$ одной простой кривой Γ. Подчеркнем еще раз, что кривая Γ — это отображение, а линия $C = W(\Gamma)$ — это множество точек.

[39] В символе $[F(z),\, A]_\Gamma$ отсутствуют в явном виде точки z_0 и z_1. Дело в том, что информация об этих точках “содержится” в символе Γ (поскольку z_0 — начало, а z_1 — конец кривой Γ). Отметим, что иногда для краткости мы будем использовать вместо символа $[F(z),\, A]_\Gamma$ более простой символ $[A]_\Gamma$. При этом мы будем отдельно указывать, о какой многозначной функции $F(z)$ идет речь.

[40] Строго говоря, надо говорить об аналитическом продолжении не значения A, а определенного элемента $g(z)$ многозначной функции $F(z)$ в точке z_0, такого, что $g(z_0) = A$. Для простоты мы считаем, что значение A однозначно определяет этот элемент.

[41] Символом $D^{(i)}(\Gamma)$ мы обозначаем внутренность, а символом $D^{(e)}(\Gamma)$ — внешность простой замкнутой кривой Γ. Обозначения происходят от первых букв английских слов interior — внутренность и exterior — внешность. Отметим, что множества $D^{(i)}(\Gamma)$ и $D^{(e)}(\Gamma)$ являются областями, поэтому использование в символах $D^{(i)}(\Gamma)$ и $D^{(e)}(\Gamma)$ буквы D совершенно обоснованно (см. § 3, замечание 1).

Если $C = W(\Gamma)$ — носитель простой замкнутой кривой Γ, то для обозначения внутренности кривой Γ наряду с символом $D^{(i)}(\Gamma)$ можно использовать символ $D^{(i)}(C)$, а для обозначения внешности кривой Γ наряду с символом $D^{(e)}(\Gamma)$ можно использовать символ $D^{(e)}(C)$.

своими значениями в этой точке, то из последних двух формул можно сделать вывод, что точка $z = 0$ является логарифмической точкой ветвления многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ и алгебраической точкой ветвления порядка n многозначной функции $\{\sqrt[n]{z}\}_{\mathbb{C}}$.

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq \pm 1$, и пусть Γ, Γ_1 и Γ_2 — простые замкнутые кусочно-гладкие кривые, начинающиеся и заканчивающиеся в точке z_0 и ориентированные против часовой стрелки. Пусть $(\pm 1) \in D^{(i)}(\Gamma)$, $1 \in D^{(i)}(\Gamma_1)$, $(-1) \in D^{(e)}(\Gamma_1)$, $(-1) \in D^{(i)}(\Gamma_2)$, $1 \in D^{(e)}(\Gamma_2)$.

Можно доказать, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие формулы (в приводимых ниже формулах для краткости опущено обозначение многозначной функции $F(z) = \operatorname{Arccos} z$):

$$\big[(\arccos z_0)_k^{(1)}\big]_\Gamma = (\arccos z_0)_{k+1}^{(1)}, \quad \big[(\arccos z_0)_k^{(2)}\big]_\Gamma = (\arccos z_0)_{k-1}^{(2)};$$

$$\big[(\arccos z_0)_k^{(1)}\big]_{\Gamma_1} = (\arccos z_0)_k^{(2)}, \quad \big[(\arccos z_0)_k^{(2)}\big]_{\Gamma_1} = (\arccos z_0)_k^{(1)};$$

$$\big[(\arccos z_0)_k^{(1)}\big]_{\Gamma_2} = (\arccos z_0)_{k+1}^{(2)}, \quad \big[(\arccos z_0)_k^{(2)}\big]_{\Gamma_2} = (\arccos z_0)_{k-1}^{(1)}.$$

Если считать известным тот факт, что многозначная функция $\operatorname{Arccos} z$ является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, а также тот факт, что элементы этой многозначной функции в точке z_0 однозначно определяются своими значениями в этой точке, то из этих формул можно достаточно легко сделать следующие выводы: 1) в окрестности точки $z = \infty$ многозначная функция $\operatorname{Arccos} z$ распадается на две аналитические ветви, для каждой из которых точка $z = \infty$ является логарифмической точкой ветвления; 2) в проколотой окрестности точки $z = 1$ (точки $z = -1$) многозначная функция $\operatorname{Arccos} z$ распадается на счетное множество аналитических ветвей, для каждой из которых точка $z = 1$ (точка $z = -1$) является алгебраической точкой ветвления второго порядка.

Пример 8. Пусть D — такая односвязная область на комплексной плоскости, что $0 \in D$, $(\pm 1) \notin D$. По теореме о монодромии (см., например, [17]) аналитические многозначные функции $F(z) = \operatorname{Arccos} z$ и $G(z) = \dfrac{1}{\{\sqrt{1 - z^2}\}_{\mathbb{C}}}$ распадаются в области D на регулярные однозначные ветви[42]. Пусть $f(z)$ — такая регулярная однозначная ветвь многозначной функции $F(z)$, что $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, а $g(z)$ — такая регулярная однозначная ветвь многозначной функции $G(z)$, что $g(0) = 1$. Можно доказать, что в каждой точке области D справедливо равенство $f'(z) = -g(z)$. Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница следует, что

$$f(z_0) = \frac{\pi}{2} - \int\limits_\Gamma g(z)\, dz.$$

Здесь z_0 — произвольная точка области D, отличная от точки 0, а Γ — простая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D, начинающаяся в точке 0 и заканчивающаяся в точке z_0.

[42] Частным от деления числа λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) на множество X ($X \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$) называется множество $\dfrac{\lambda}{X} = \left\{ \dfrac{\lambda}{x} \;\middle|\; x \in X \right\}$.

Последнюю формулу с использованием предлагаемых нами обозначений можно записать в следующем виде:

$$f(z_0) = \frac{\pi}{2} - \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\left(\sqrt{1-z^2}\,\right)_{k(z)}}.$$

Здесь $k(z)$ — целозначная функция, определенная на носителе $C = W(\Gamma)$ кривой Γ. Функция $k(z)$, $z \in C$, однозначно выделяется следующими тремя условиями: 1) $k(0) = 0$; 2) функция $k(z)$ не принимает никаких значений, отличных от 0 и 1 (то есть $W(k) \subset \{0,\, 1\}$); 3) функция $\left(\sqrt{1-z^2}\,\right)_{k(z)}$ непрерывна на множестве C.

Будем считать, что кривая Γ ориентирована в направлении возрастания параметра t, то есть $\Gamma = [z = \varphi(t);\; t \in [a,\, b];\; t\!\uparrow]$. Тогда $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = z_0$.

Функция $k_1(t) = k\big(\varphi(t)\big)$, $t \in [a,\, b]$, может иметь точки разрыва только при тех значениях параметра t, при которых точка $z = \varphi(t)$ носителя C кривой Γ лежит либо на луче $(-\infty,\, -1)$, либо на луче $(1,\, +\infty)$.

Пусть носитель C имеет конечное число точек пересечения z_i, $i \in [1\,..\,n]$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, с лучами $(-\infty,\, -1)$ и $(1,\, +\infty)$, причем $z_i = \varphi(t_i)$, где $t_i \in (a,\, b)$. Если в точке z_i кривая Γ переходит из одного квадранта комплексной плоскости в другой[43], то функция $k_1(t)$ в точке t_i скачком изменяет свое значение (значение 0 меняется на 1 или значение 1 меняется на 0). Если в точке z_i кривая Γ пересекает луч $(1,\, +\infty)$ и переходит из четвертого квадранта в первый (из первого квадранта в четвертый), то функция $k_1(t)$ непрерывна в точке t_i слева (справа). Если в точке z_i кривая Γ пересекает луч $(-\infty,\, -1)$ и переходит из второго квадранта в третий (из третьего квадранта во второй), то функция $k_1(t)$ непрерывна в точке t_i слева (справа). Во всех остальных точках $t \in [a,\, b]$, $t \neq t_i$, функция $k_1(t)$ непрерывна (в точке $t = a$ функция $k_1(t)$ непрерывна справа, а в точке $t = b$ слева).

Пусть z — произвольная точка носителя C кривой Γ, отличная от точки 0, и пусть точке z отвечает значение $t(z)$ параметра t, то есть $z = \varphi\big(t(z)\big)$, $t(z) \in$ $\in (a,\, b]$. Рассмотрим кривую $\Gamma(z)$, которая является сужением отображения Γ на отрезок $[a,\, t(z)]$, то есть $\Gamma(z) = \Gamma\big|_{[a,\, t(z)]} = [z = \varphi(t);\; t \in [a,\, t(z)];\; t\!\uparrow]$. Кривая $\Gamma(z)$ начинается в точке 0 и заканчивается в точке z. Можно доказать, что при всех $z \in C$, $z \neq 0$, справедливо равенство

$$\Big[\big\{\sqrt{1-z^2}\,\big\}_{\mathbb{C}},\, 1\Big]_{\Gamma(z)} = \left(\sqrt{1-z^2}\,\right)_{k(z)}.$$

Пример 9. В односвязной области $\mathbb{C} \setminus \big((-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty)\big)$ аналитическая многозначная функция $\operatorname{Arccos} z$ распадается на счетное множество регулярных однозначных ветвей $(\arccos z)_k^{(1)}$ и $(\arccos z)_k^{(2)}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

[43] Рассмотрим в качестве примера высказывание: “В точке $z_i \in (1,\, +\infty)$ кривая Γ переходит из первого квадранта комплексной плоскости в четвертый”. Это высказывание означает, что существует $0 < \delta < \min\{t_i - a,\, b - t_i\}$ такое, что при всех $t \in (t_i - \delta,\, t_i)$ выполняется включение $\varphi(t) \in \{\operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z > 0\}$, а при всех $t \in (t_i,\, t_i + \delta)$ выполняется включение $\varphi(t) \in \{\operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z < 0\}$.

Пусть $x \in (1, +\infty)$. Можно доказать, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие формулы:

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} (\arccos z)_k^{(1)} = \lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}} (\arccos z)_k^{(2)};$$

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}} (\arccos z)_k^{(1)} = \lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} (\arccos z)_k^{(2)};$$

$$\lim_{\substack{z\to -x\\ \operatorname{Im} z>0}} (\arccos z)_k^{(1)} = \lim_{\substack{z\to -x\\ \operatorname{Im} z<0}} (\arccos z)_{k+1}^{(2)};$$

$$\lim_{\substack{z\to -x\\ \operatorname{Im} z<0}} (\arccos z)_k^{(1)} = \lim_{\substack{z\to -x\\ \operatorname{Im} z>0}} (\arccos z)_{k+1}^{(2)}.$$

Эти равенства можно использовать, в частности, для построения римановой поверхности аналитической многозначной функции $\operatorname{Arccos} z$. Например, первое из этих равенств означает, что регулярная функция $(\arccos z)_k^{(2)}$ является аналитическим продолжением регулярной функции $(\arccos z)_k^{(1)}$ из первого квадранта комплексной плоскости в четвертый через луч $(1, +\infty)$ действительной оси. Функция, получающаяся в результате “склеивания” функции $(\arccos z)_k^{(1)}$ в первом квадранте и функции $(\arccos z)_k^{(2)}$ в четвертом квадранте вдоль луча $(1, +\infty)$, будет не только непрерывной, но и регулярной в точках указанного луча (см., например, [17]).

Мы надеемся, что приведенные нами примеры (а их список можно продолжить) показывают обоснованность и целесообразность использования в учебном процессе предлагаемой нами системы обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений.

Автор выражает глубокую благодарность С. И. Гурову (Московский государственный университет), В. Н. Салию (Саратовский государственный университет) и Дж. Давенпорту (Университет Бата, Великобритания), любезно указавшим автору, соответственно, на книгу [8], статью [12] и стандарт [16], а также сделавшим ряд очень полезных замечаний.

Автор будет благодарен читателям за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г. Д. Глейзер. — М.: Изд-во УРАО, 2001. С. 243–263.
2. Прокопчук Ю. Ю., Широков А. И., Умрихин В. В. Информатика. Раздел: Основы теории знаковых систем. Глава 2. Элементы семиотики. — М.: МИСИС, 2000. 73 с.
3. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2003.
4. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977. 320 с.
5. Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Теория функций комплексного переменного: Решение задач. — Киев: Вища шк., 1986. 336 с.

6. Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики. (Функции комплексного переменного. Операционное исчисление.) — М.: Высш. шк., 1973. 464 с.
7. Колягин С. Ю. Основы теории функций комплексного переменного / Под ред. В. Л. Матросова. — М.: Изд-во МПГУ, 2006. 354 с.
8. Салий В. Н. Решетки с единственными дополнениями. — М.: Наука, 1984. 128 с.
9. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. 1. Кн. 1. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 454 с.
10. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. — М.: Наука, 1986. 544 с.
11. Хавин В. П. Основы математического анализа. Ч. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 448 с.
12. Puglisi S. J., Simpson J. The expected number of runs in a word // Australasian J. Comb. 2008. Vol. 42. P. 45–54.
13. Общая алгебра. Т. 1 / О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков и др.; Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1990. 592 с.
14. Сидоров Ю. В. Обратные гиперболические функции // Мат. энцикл. слов. / Под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Сов. энцикл., 1988. С. 423–424.
15. Kahan W. Branch cuts for complex elementary functions // The state of the art in numerical analysis: Proc. of the joint IMA/SIAM conf. on the state of the art in numerical analysis held at Univ. of Birmingham, 14–18 Apr. 1986 / Ed. by A. Iserles and M. J. D. Powell. — Oxford: Clarendon press, 1987. P. 165–211.
16. ISO/IEC 10967–3:2006. Information technology — Language independent arithmetic — Part 3: Complex integer and floating point arithmetic and complex elementary numerical functions.
17. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. 480 с.

A NOTATION SYSTEM FOR MAIN MULTIVALUED FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND FOR THEIR VALUES

S. V. Kostin

Leading principles when constructing mathematical symbols are formulated. A clear and consistent system of notations for all main multi-valued functions of complex variable and for the values of these multi-valued functions is developed. The phenomenon of polysemy is absent in the proposed system, i. e. an each mathematical symbol has one strictly definite meaning. Examples of using the proposed system are presented.

Keywords: complex analysis, multi-valued function, principal value, mathematical notation, polysemy and homonymy.