

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 513.73

МАТЕМАТИКА В ФИЗИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ:
НЕОБХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ¹

Ю. Г. Рудой*, В. И. Санюк**

*Российский университет дружбы народов,
Россия, 117939, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6;*** Центр естественно-научного образования, e-mail: rudikar@mail.ru**** Кафедра теоретической физики, e-mail: vsanyuk@mail.ru*

Дан краткий очерк развития взаимосвязи физики как наиболее фундаментальной науки о природе и геометрии как одного из наиболее универсальных разделов математики. Основной вывод состоит в том, что в обязательные учебные курсы математики — по крайней мере, для физических, физико-технических и естественно-научных специальностей университетов — следует шире вводить элементы современной геометрии как универсального языка современной физики и естествознания.

Ключевые слова: геометрия, физика, механика, квантовая теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

На развитие физики и других естественных наук постоянно оказывали влияние достижения в таких областях математики, как алгебра, анализ, теория вероятностей и геометрия. По нашему убеждению в физике завтрашнего дня всё более существенное место будет занимать геометрия², и мы попытаемся кратко обосновать эту точку зрения применительно к реалиям отечественного образования.

Взаимосвязь физики (включая механику и астрономию) и геометрии уходит своими корнями в глубокую античность — по сути дела, ко временам зарождения этих наук — и ассоциируется прежде всего с именами Евклида и Архимеда, Гиппарха и Птолемея. Высоко ценил геометрию Платон, считавший, что именно она “приближает разум к истине”.

Более глубокая связь между естественными науками и геометрией начала устанавливаться в XVII столетии в трудах Декарта, Паскаля и Ферма, с одной стороны, и Кеплера, Галилея и Ньютона — с другой. В дальнейшем эта связь продолжала укрепляться, так что современную физику невозможно себе представить вне геометрического языка. Однако, на наш взгляд, этот факт еще не нашел адекватного отражения в учебных программах и учебных пособиях для “среднего” физика (не теоретика), не говоря уже об естествоиспытателях и инженерах.

¹ Данная статья является развернутым изложением доклада, представленного авторами в марте 2008 года на Международной конференции к 85-летию чл.-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева [36].

² Современное по содержанию и блестящее по форме изложение этого круга вопросов дано Ж. Лошаком (учеником Луи де Бройля) в общедоступной (без единой формулы!) книге [1].

Для того чтобы в полной мере осознать возникновение и развитие этой связи, следовало бы детально проследить длительную историческую эволюцию как самого термина, так и обозначенного им понятия прежде всего в самой математике, что в пределах данной публикации сделать затруднительно.

Читателя можно адресовать, например, к энциклопедическим статьям по этой тематике в [2] и к содержательным историко-методологическим книгам [3–6], а также к полезным и доступным даже на школьном уровне книгам по геометрии [7–11] и её применениям в физике [12–15]. Более общие аспекты взаимоотношений математики, физики и естественных наук отражены, например, в [16–18].

Ясно, что как сами области науки, так и соответствующие им основные термины, со временем немалого перерастают свои первоначальные предметные и смысловые рамки. Так, геометрия, зародившаяся в виде планиметрии, разделилась затем на евклидову и неевклидову, аналитическую, алгебраическую, дифференциальную и т. п.

В физике расширение области применимости геометрии стало происходить с середины XVIII века в исследованиях Даламбера, Лагранжа и позднее Гамильтона по аналитической механике. Все эти ученые были скорее математиками, чем физиками; они ввели понятия обобщенных координат, а на их основе — понятия конфигурационного и фазового пространств.

2. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ КАК НАУКИ

Длительное время геометрические понятия и методы в механике и физике оставались вспомогательными и их использование было продиктовано в основном чисто вычислительными удобствами. Важная роль геометрических представлений в классической механике подчеркивалась в книге Синга [23], изданной в 1960 году в качестве одного из томов немецкой физической энциклопедии издательства “Шпрингер”.

В настоящее время геометрический подход в физике получил серьезное концептуальное развитие; выяснилось, например, что наиболее естественным математическим языком современной квантовой теории поля является топология и геометрия расслоенных пространств³ (подробнее см., напр., [1, 28, 29, 31, 44, 46]).

Однако тенденция к “геометризации” затронула и более традиционные разделы физики; оказалось, что наиболее естественным математическим языком гамильтоновой динамики является так называемая симплектическая геометрия фазового пространства физического объекта, тогда как адекватным языком термодинамики — контактная геометрия пространства термодинамических параметров. Эти идеи в течение более чем 30 лет последовательно развивались В. И. Арнольдом и его школой [19–22]; приведем здесь наиболее характерные высказывания.

³ Убедительным отражением тенденции сближения современной физики и геометрии можно считать открытие 20 лет назад международного “Журнала геометрии и физики” (Journal of Geometry and Physics), в редколлегию которого входят такие авторитетные ученые, как Арнольд, Джимбо, Дубровин, Тирринг, Траутман (гл. редактор), Фаддеев, Янг.

“Характеризуя аналитическую динамику в своих “Лекциях о развитии математики в XIX столетии” Ф. Клейн писал, что “физик для своих задач может извлечь из этих теорий лишь очень немного, а инженер — ничего”. Развитие науки в последующие годы решительно опровергло это замечание.

Гамильтонов формализм лег в основу квантовой механики и является одним из наиболее часто употребляемых орудий в математическом арсенале физики. После того как было осознано значение симплектической структуры и принципа Гюйгенса для задач оптимизации, уравнения Гамильтона стали постоянно использоваться в инженерных расчетах в этой области” (из книги [19]).

“... Симплектическая геометрия упрощает и делает обозримым устрашающий (! — *Авт.*) формальный аппарат гамильтоновой динамики (...) таким же образом, как обычная геометрия линейных пространств сводит громоздкие координатные вычисления к небольшому числу простых основных принципов” (из книги [21]).

“... Любому математику известно, что невозможно понять (! — *Авт.*) ни один элементарный курс термодинамики. Причина в том, что согласно формулировке Гиббса (очевидно, имеется в виду цикл термодинамических работ Гиббса 1870-х годов. — *Авт.*) термодинамика основана на достаточно сложной математической теории — контактной геометрии.

Эта геометрия входит в число нескольких “простых геометрий” из так называемого списка Картана, но всё еще почти неизвестна физикам — в отличие, например, от римановой и симплектической, или пуассоновой геометрий, чья фундаментальная роль в физике сегодня полностью признана” (из статьи [20], перевод наш. — *Авт.*).

Одним из самых впечатляющих достижений недавно истекшего XX столетия является создание Эйнштейном (1905) новых представлений о пространстве и времени (специальная теория относительности), обобщенных им (1916) в рамках общей теории относительности.

На многие последующие годы стало вполне традиционным (а для некоторых, к сожалению, и исчерпывающим) применение геометрии именно к пространствам событий. Эти пространства дают необходимую основу для описания лишь кинематических аспектов физических теорий — как классических, так и квантовых.

Однако наряду с этим в физике необходимо также использование и пространств состояний (например, фазового пространства), без которых невозможны важнейшие — прежде всего динамические — аспекты физического описания. Иначе говоря, для физики представляет интерес не только то, где и когда происходят те или иные физические события, но и то, в каких математических понятиях следует описывать само содержание этих событий; последнее настоятельно требует расширения круга геометрических представлений.

3. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ КАК УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Таким образом, применение геометрии (в широком смысле слова, включая топологию) в физике становится всё более актуальным и требует адекватного отражения в математической подготовке как физиков, так и естественников и инженеров. Разумеется, этот “вызов” уже достаточно давно принят математическим сообществом и нашел вполне адекватный ответ на уровне подготовки профессиональных физиков-теоретиков.

В конце 60-х – начале 70-х годов XX века (кстати, по инициативе механиков, а не “чистых” математиков) возникла проблема модернизации геометрических курсов, читаемых на мехмате МГУ. Этим занялась группа талантливых молодых топологов под руководством С. П. Новикова, и одним из важнейших результатов их деятельности стали замечательный по ясности изложения, деформализованный и ориентированный на интересы и возможности механиков и физиков курс современной геометрии [24] и его дальнейшие модификации [25–27].

Значительный интерес представляют методические установки авторов этих курсов (см., например, предисловие к [24]), применимые и в более широком контексте математического образования физиков и инженеров (курсивов всюду наш. — Авт.).

“... Язык изложения должен быть предельно простым, не абстрактным, терминология — всюду, где это возможно, — общей с той, которая используется физиками. ... Мы имели в виду читателя, впервые изучающего топологическую книгу и желающего узнать не слишком мало и при этом за минимально возможное время, — например, молодого физика-теоретика современной школы.

Нам казалось разумным в той мере, в которой это вообще возможно в математической книге, пытаться использовать методический опыт, накопленный физиками: *как сделать математические нетривиальные явления понятными с помощью минимальных общедоступных средств*”.

“... мы старались минимизировать уровень абстрактности языка изложения и системы обозначений, жертвуя часто так называемой “общностью” формулировок и доказательств. Нередко важный факт в узловых, определяющих всю суть дела примерах⁴ может быть получен из элементарных соображений классического анализа и геометрии, не использующих никакие современные “сверхинвариантные” понятия и обозначения, но его формулировка и особенно доказательство “в общем виде” требуют резкого усложнения уровня формализации. ...”.

“... мы соблюдали также принцип возможной независимости изложения различных глав, чтобы каждую из них в отдельности было легче читать (если это вообще допускается сутью дела). Однако для ряда понятий топологии, не представленных никакими аналогиями в классической математике, сложность для читателя существенно возрастает — тут ничего не поделаешь.

⁴ Этот подход вполне соответствует одному из принципов, приписываемых Ньютоном, гласящему, что “при изучении наук примеры важнее правил”.

В любом случае, по нашему мнению, *понимание должно предшествовать формализации и обоснованию*. Ясное понимание деловой сути предмета должно достигаться до того, как началась формализация: когда формализуешь что-то, надо это уже понимать. *Обосновывать еще не понятую теорию нелепо; формальный язык разделяет, а не объединяет математику, затрудняет понимание*".

Еще более отчетливо звучат основные из этих идей спустя более чем 30 лет в предисловии к новой монографии Новикова и Тайманова [27]:

"Следует со всей определенностью сказать, что даже сейчас нет удобоваримого учебного курса, покрывающего основные достижения классической топологии 1950–70-х гг., не говоря уже о более позднем периоде. По нашему убеждению, сейчас наступает период, когда широкое сообщество математиков — геометров, аналитиков и многих других — возьмется, наконец, за *серьезное изучение того математического багажа, который создала теоретическая физика XX века*.

Уже 25 лет назад было ясно, что такой момент должен наступить, но в тот период широкое математическое сообщество еще не осознало необходимость этого. Соответствующие начинания в некоторых наших книгах долго оставались недостаточно потребленными; сейчас, однако, положение меняется, и *осознание необходимости изучить математический аппарат физики среди математиков возросло*.

К тому же положение дел в самой теоретической физике таково, что весьма возможно, что *сохранить созданные ею в XX веке глубокие математические методы для будущего человечества сможет только сообщество математиков*. Потеря замечательного соединения трезвой рациональности при изучении реального мира с выдающимся творением новой высокой математики настораживает". (Курсив всюду наш. — Авт.)

Вряд ли возможно более адекватно и точно сформулировать суть взаимоотношений между математикой и физикой нашего времени. Существенно, что высказанные принципы были активно реализованы, и во многом под влиянием и при участии школы Новикова в физике возник геометро-топологический "бум", отражением которого⁵ в литературе явился ряд полезных книг и статей как в России [28–32], так и за рубежом [33, 34].

Проблема, однако, состоит в том, что как по уровню изложения, так и по объему все эти источники (может быть за исключением [33]) превышают возможности "средних" физиков, не говоря уже о других естествоиспытателях и инженерах. Отсутствие более адекватной этим категориям читателей учебной литературы во многом объясняется просто недостаточным взаимным обменом информацией между математикой и физикой.

Во многом это обусловлено также неизбежным, но порою явно излишним грузом традиций в преподавании обеих наук. И если эффективно повлиять на первую причину вряд ли возможно, то разумное преодоление второй — с учетом необходимой преемственности и даже некоторого консерватизма, при существующем образовании, — прямая задача научно-педагогического сообщества.

⁵ Краткое описание причин и основных этапов возникновения этого бума можно найти в книгах [6] и [31, гл. 6].

В поддержку такой позиции обратимся к мнению столь признанного авторитета в области преподавания современной математики, как Кудрявцев (см. в этой связи его книгу [35]; курсив в цитатах наш. — *Авт.*).

“... Вопросу общей эрудиции следует уделять большое внимание при подготовке не только преподавателей, но и научных работников, чтобы они действительно были учеными *и не занимались открытием давно уже известных вещей*... К сожалению, не существует точных рецептов, как надо преподавать различные разделы математики. Методика преподавания математики не наука, а искусство”.

“Большинству (преподавателей математики) свойственно считать, что так, как они сами учились (у кого-нибудь или самостоятельно), так лучше всего учить и других, забывая о том, что часто с тех пор, когда они учились сами, прошло 40–50 лет; иногда они полагают, что то, что понравилось им в свое время или хорошо было освоено, является самым важным и нужным и теперь. *Часто то, что преподаватель сам не учил совсем или учил в зрелом возрасте, кажется ему сложным, изысканным и трудным, а потому и ненужным при общем образовании*”.

“... Передовая педагогическая математическая мысль давно уже считает приоритетом не навыки (которые нужны, но не являются самоцелью), а привитие общей математической культуры, что иногда называют “чистой” математикой... *Учить следует тому, что нужно и чему трудно научить*”.

“Наиболее разумным представляется положение (...), когда объем математических знаний, степень владения ими и характер приобретаемых студентам навыков (т. е. *чему учить*) определяется ведущими специалистами в области будущей специализации студентов, а *как* этому учить остается делом профессионалов-математиков”.

4. НЕОБХОДИМОСТЬ ОБЗОРНОГО КУРСА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Таким образом, существенно возрастает роль и ответственность обеих частей научно-педагогического сообщества — и естественно-научной, и математической — за правильное понимание того, чего именно недостает для адекватной и всесторонней подготовки современных специалистов.

При решении поставленной задачи, по-видимому, не должен слишком остро стоять важный для математиков вопрос о строгости изложения: ведь изучающему нет необходимости сразу и активно применять весь математический “арсенал”. Однако представлять себе его состав и возможности ему все-таки следует — хотя бы для того, чтобы знать, как именно продолжить свое образование.

Поэтому проблема, на наш взгляд, состоит именно в поисках разумного компромисса; так, если исходить из общепринятого понятия “физической строгости”, то может оказаться вполне возможным изложение большей части новых геометрических понятий лишь на концептуальном, но логически достаточно связном уровне. Разумеется, конкретные методические вопросы

подобного изложения должны оставаться в компетенции профессионалов-математиков.

Представляется, что наряду с обычными регулярными курсами математики (может быть, лишь слегка “ужатыми”) следует читать дополнительные пропедевтические или обзорные курсы⁶ (а еще лучше — и те, и другие), что позволяет увидеть всё “пространство геометрии” — а по большому счету, и всей математики как единого целого — с высоты “птичьего полета”.

По существу речь идет о создании нового учебного курса с условным названием⁷ “Концепции современной математики” (КСМ) — в известной мере по аналогии с уже существующим и успешно развивающимся “Концепции современного естествознания” (КСЕ).

Разумеется, с реализацией предлагаемого проекта связаны неизбежные трудности, но ведь еще 10–15 лет назад курс КСЕ тоже казался невыносимым — во всяком случае, в массовом высшем профессиональном образовании; сегодня этот курс уже вошел обязательным федеральным компонентом в учебные планы всех гуманитарных специальностей.

Как построить и читать курс КСМ, избегая верхоглядства и поверхностности, — дело, разумеется, самих математиков, однако мы полагаем, что это в принципе возможно без существенного ущерба для “чистоты” математики. Во всяком случае, успешный прецедент такого рода существует: ровно 300 лет назад Кеплеру удалось впервые превратить астрономию из “небесной геометрии” в “небесную физику”. Насколько сложной была эта задача, видно из признания самого Кеплера в его сочинении “Новая, изыскивающая причины астрономия, или физика неба” (1609):

“Тяжкий жребий — писать в наши дни математические книги. . . Если не соблюдать надлежащей строгости в формулировках теорем, пояснениях, доказательствах и следствиях, то книгу нельзя считать математической. Если неукоснительно соблюдать все требования строгости, то чтение книги становится затруднительным. . .”

В том, что разумный компромисс всё же возможен, убеждают, например, достаточно глубокие книги Манина [16] и Пенроуза [18], а также Мандельброта [40], написанные в жанре научного эссе и практически не содержащие формул (а следовательно, по мнению некоторых, и недостаточно полные и строгие).

Мы разделяем мнения по этому поводу, высказанные рядом выдающихся математиков: “Господа, для Гауссовской строгости у нас нет времени. . .” (Якоби) и “результат должен быть не строгим, а верным. . .” (Колмогоров). С другой стороны, согласно Гильберту, “будет большой ошибкой думать, что строгость в доказательстве есть враг простоты; (. . .) иногда строгое наиболее доступно”.

⁶ Подобные идеи всё более становятся общепринятыми в среде преподавателей математики — см., например, материалы недавней (март 2008) конференции [36] к 85-летию чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева.

⁷ Не следует путать предлагаемый курс с уже существующим в рамках комплекса дисциплин фундаментального естественно-научного образования курсом “Математика и информатика” только для гуманитарных специальностей.

В качестве современного примера реализации идей, созвучных высказанным выше, приведем двухсеместровый курс [33], который в течение 10 лет (с 1980 по 1990 год) создавался в Гарвардском университете двумя известными американскими математиками — Бамбергом и Стернбергом⁸; их методические установки представляются весьма разумными и убедительными.

“Большинство математиков и все физики, результаты которых представлены в этой книге, работали в первом десятилетии двадцатого века. Это значит, что изложенному материалу уже по крайней мере 90 лет. И, тем не менее, он еще не вошел в наши элементарные курсы математики, хотя большая его часть должна изучаться современными физиками, что они и делают на определенном этапе своей карьеры. Причины этого, в значительной мере, исторические”.

“Математики уже согласились, а физики постепенно привыкают к тому, что самым удобным аппаратом для геометрического анализа является внешнее дифференциальное исчисление Грассмана и Картана. Его преимущество состоит в том, что наряду с простыми и четкими правилами вычисления все объекты имеют прозрачный геометрический смысл.

В рамках внешнего анализа геометрические законы физики принимают простую и элегантную форму. И нам кажется, что пришла пора заменить им векторное исчисление в программах начального университетского обучения. . . Мы полагаем, что разумно уже в самом начале изучения математики дать студентам представления о связи физики и геометрии”.

“Наш педагогический метод — изложение по “спирали”, т. е. мы рассматриваем одну и ту же тему несколько раз, возвращаясь к ней на более высоком уровне, одновременно расширяя области её применения. Такое построение мы предпочитаем “прямолинейному” строгому логическому порядку. Надеемся, что при этом мы избежим логических ошибок типа “порочного круга”.

Такой подход требует от студентов определенного доверия и терпения. Но мы надеемся, что в конце концов они будут вознаграждены более глубоким интуитивным пониманием предмета в целом”.

Разумеется, как методические принципы, так и конкретное содержание подобных курсов могут быть весьма различными, однако в любом случае, по образному выражению В. Высоцкого, “нам тайны неоткрытые открыть пора. . .”! Без этого математика может оказаться в ситуации “скупого рыцаря”, у которого “лежат без пользы тайны как в копилке. . .”, причем этим “тайнам” современной геометрии, в “раскрытии” которых может быть заинтересован студент-естественник, как правило, уже не менее ста лет (хорошо уже, что не триста!).

По нашему убеждению, круг подобных вопросов следовало бы отразить в курсах математики, обеспечивающих в настоящее время преподавание комплекса дисциплин фундаментального естественно-научного образования. В

⁸ Характерно, что, по утверждению самих авторов, их “Курс математики для студентов-физиков” с равным правом можно было бы назвать “Курс физики для студентов-математиков”. Курс математической физики аналогичного типа, но значительно более сложный по уровню, недавно создан известным австрийским физиком-теоретиком Тиррингом [34].

подтверждение сошлемся на интересное высказывание В. И. Арнольда (курсив наш. — *Авт.*) в предисловии к русскому изданию книги [45] “Геометрия и *физика* узлов”, принадлежащей перу одного из крупнейших современных математиков М. Атья:

“Всё развитие теоретической физики убедительно показало, что только последовательная геометризация делает обозримым всё многообразие наблюдаемых явлений. Достижения Ньютона и Гамильтона, Максвелла и Гиббса, Эйнштейна и Дирака, Фейнмана и Янга доставляют *многочисленные и хорошо известные примеры плодотворности геометрических концепций в физике.*

Сегодня, однако, мы стали свидетелями *обратного процесса*: использования развитых в теоретической физике концепций в фундаментальной математике. Не скованные ни иссушающим алгебраически-бурбакистским образованием, ни обязанностью строго доказывать (или хотя бы сформулировать) свои утверждения, *физики оказались способными предсказывать глубокие математические факты в топологии и алгебре, в теории чисел и алгебраической геометрии*”.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заметим, что в современной физике развиваются весьма интересные и многообещающие процессы, ведущие, по всей видимости, к наиболее радикальным изменениям за всю историю существования физики как науки. Прежде всего это связано с фактическим завершением эпохи так называемой “линейной парадигмы” в развитии физики, в основе которой лежит чрезвычайно простая идея: все процессы на малых расстояниях и за малые промежутки времени протекают приблизительно равномерно.

Похоже, что эта идея была близка еще Евдоксу Книдскому и Архимеду, но “в полный рост” её первым осознал и сформулировал Ньютон, который воспринимал ряды как универсальный метод решения задач о движении тел и при этом обычно ограничивался лишь первыми — линейными — членами разложений. На этой же идее построены дифференциальное и интегральное исчисление — основной математический аппарат курса общей физики, а также все его последующие модификации.

Ясно, что в рамках подобной парадигмы (иногда называемой “теорией возмущений”) в принципе возможно только локальное физическое описание. Глобальное описание предполагает, как минимум, сходимость соответствующих рядов (трудно проверяемую и далеко не всегда существующую), однако уже задолго до этого могут вообще перестать выполняться физические предположения, положенные в основу локального линейного описания.

Поворотным моментом перехода от “линейного” (локального) мышления к “нелинейному” (глобальному) стали 70-е годы XX века, хотя отдельные “проблески”, конечно, имели место и значительно раньше. Ограниченность математического аппарата “линейной физики” проявилась особенно отчетливо при попытках решения существенно нелинейных физических задач, прин-

ципиально нелинеаризуемых, т. е. не сводящихся к линейным⁹. Прогресс в изучении подобных задач был достигнут только после освоения адекватных математических средств — таких как дифференциальная геометрия, алгебраическая топология, теория расслоенных пространств, вариационное исчисление в целом, геометрия фракталов и т. д.

Для того чтобы обо всем этом можно было говорить в рамках курса общей физики, требуется, как минимум, некоторая модернизация геометрического образования физиков. Стандартные курсы аналитической геометрии, ограничивающиеся изучением прямых, плоскостей и конических сечений, следует дополнить теорией кривых и поверхностей.

Представления о таких геометрических инвариантах, как кривизна и кручение пространственных кривых, квадратичные формы поверхностей, гауссова и средняя кривизна поверхностей, эйлерова характеристика, оказались весьма востребованными при описании свойств солитонных решений.

Этот класс решений актуален не только в квантовой теории поля, но и в теории твердого тела (доменные стенки в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках), а также в нелинейной гидродинамике (ударные волны и теория турбулентности). Полезно — а порой необходимо — знакомство физиков и с первичными понятиями топологии многообразий, теории гомотопий и кохомологий, например в объеме учебника [24].

Предлагаемая модернизация геометрического образования физиков, естественников и инженеров даст возможность даже в рамках общих курсов физики знакомить студентов с современными достижениями нелинейной науки, без чего трудно себе представить себе квалифицированного современного специалиста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лошак Ж. Геометризация физики. — М. – Ижевск: РХД, 2005. 279 с.
2. Математический энциклопедический словарь. — М.: Сов. энцикл., 1988. 847 с.
3. Бурбаки Н. Элементы математики. Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1963. 292 с.
4. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. “Современная математика”. Популярная серия. — М.: Мир, 1986. 156 с.
5. Визгин Вл. П. “Эрлангенская программа” и физика. — М.: Наука, 1975. 112 с.
6. Монастырский М. И. Риман. Топология. Физика. — М.: Янус-К, 1999. 188 с.
7. Клайн М. Геометрия. В сб.: “Математика в современном мире”. — М.: Мир, 1967. С. 47–63.
8. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. От проективной геометрии — к неевклидовой. Серия “Мир знаний”. — М.: Просвещение, 1979. 159 с.
9. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. Дифференциалы помогают геометрии. Серия “Мир знаний”. — М.: Просвещение, 1982. 192 с.
10. Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. — М.: Сов. радио, 1980. 145 с.

⁹ Элементарное, но достаточно корректное описание этих проблем можно найти, например, в книгах [43, 44].

11. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. 2-е изд. — М.: УРСС, 2004. 192 с.
12. Ландау Л. Д., Румер Ю. Б. Что такое теория относительности? 3-е изд. — М.: Сов. Россия, 1975. 112 с.
13. Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Релятивистский мир. Биб-ка “Квант”, вып. 34. — М.: Наука, 1984. 178 с.
14. Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика. — М.: Знание, 1984. 64 с.
15. Воловик Г. Е., Минеев В. П. Физика и топология. — М.: Знание, 1980. 63 с.
16. Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. 64 с.
17. Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984. 446 с.
18. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. — М.: УРСС, 2003. 382 с.
19. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд. — М.: Наука, 1989. 472 с.
20. Arnold V. I. Contact Geometry: the Geometrical Method of Gibbs’s Thermodynamics // Proceedings of the Gibbs Symposium. Yale University, May 15–17, 1989. P. 163–179.
21. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия. 2-е изд. — М. – Ижевск: РХД, 2000. 167 с.
22. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. 2-е изд. — М.: УРСС, 2002. 414 с.
23. Синг Дж. Л. Классическая динамика. — М.: Физматлит, 1963. 448 с.
24. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, Физматлит, 1979. Т. 1, Т. 2. 1-е изд.; 1999. Т. 1. 5-е изд.; 1998. Т. 2. 4-е изд.; М.: УРСС, 2001. Т. 3.
25. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Наука, Физматлит, 1987. 431 с.
26. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004. 302 с.
27. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. — М.: МЦНМО, 2005. 312 с.
28. Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. Лекции по топологии для физиков. — М. – Ижевск: РХД, 1999. 131 с.
29. Ольшанецкий М. А. Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии // Успехи физ. наук. 1982. Т. 136, вып. 3. С. 421–433.
30. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. Серия “Современная математика”. Вводные курсы. — М.: Мир, 1984. 303 с.
31. Монастырский М. И. Топология калибровочных полей и конденсированных сред. — М.: ПАИМС, 1995. 188 с.
32. Применение и развитие идей Лобачевского в современной физике // Труды Международного семинара, посвященного 75-летию проф. Н. А. Черникова. Дубна, 25–27 февраля 2004 г. — Дубна: ОИЯИ, 2004. 156 с.
33. Бамберг П., Стернберг Ш. Курс математики для студентов-физиков. — М.: Фазис, 2004. Т. I. С. 1–574; 2005. Т. II. С. 575–1220.
34. Тирринг В. Курс математической и теоретической физики. — Киев: TIMPANI, 2004. Т. 1, 264 с.; Т. 2, 224 с.; Т. 3, 272 с.; Т. 4, 266 с.
35. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и её преподавание. Избранные труды. — М.: Физматлит, 2008. Т. 3. С. 16–169.

36. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования // Тезисы докладов 3-й Международной конференции, посвященной 85-летию чл.-корр РАН, проф. Л. Д. Кудрявцева. М., РУДН, 25–28 марта 2008 г. — М.: МФТИ. 816 с.
37. Мизнер Ч., Уилер А. Классическая физика как геометрия. В сб.: “Астрофизика и теория относительности” (к 100-летию А. Эйнштейна). — М.: Мир, 1979.
38. Хокинг С., Пенроуз Р. Природа пространства и времени. — М. – Ижевск: РХД, 2000. 160 с.
39. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. — М.: УРСС, 2004. 286 с.
40. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М. – Ижевск: ИКИ, 2002. 655 с.
41. Бернштейн Г., Филлипс Э. Расслоения и квантовая теория // Успехи физ. наук. 1982. Т. 136, вып. 4. С. 665–692.
42. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. 394 с.
43. Филиппов А. Т. Многоликий солитон. Биб-ка “Квант”. — М.: Физматлит, 1986. 212 с.
44. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. — М.: Физматлит, 1989. 400 с.
45. Атья М. Геометрия и физика узлов. — М.: Мир, 1995. 192 с.

MATHEMATICS AS EDUCATIONAL SUBJECT OF PHYSICISTS: NECESSITY OF GEOMETRIZATION

Yu. G. Rudoy, V. I. Sanjuk

A brief outline of development of interdependence of physics as the most fundamental science about nature, and geometry as one of the most universal branches of mathematics is given. The main conclusion is the following: the basic academic mathematical courses at least for university specializations of physics, techniques, and natural science must wider use the elements of modern geometry as a universal language of modern science.

Keywords: geometry, physics, mechanics, quantum theory.