НЕПРЕРЫВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 372.851:512.714

ЭЛЕМЕНТЫ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. С. Штерн

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского,
Россия, 644077, г. Омск, пр. Мира, 55А;
тел.: (3812)659907, 89139731909; e-mail: stern@math.omsu.omskreg.ru

Излагается программа курса лекций "Многочлены от нескольких переменных (элементарное введение в коммутативную алгебру)". Обсуждаются методические особенности курса и его место в системе дополнительного математического образования. В контексте постановки вопроса о дополнительном образовании анализируются связи предлагаемого курса с некоторыми вопросами, традиционно входящими в программы кружковой работы со школьниками.

Ключевые слова: коммутативная алгебра, многочлен, идеал, алгебраическое множество.

На протяжении длительного времени автор ведет занятия со студентами 1–2 курса и школьниками старших классов по теме "Многочлены от нескольких переменных (элементарное введение в коммутативную алгебру)". Практика проведения этих занятий дает материал для разговора о том, что такое дополнительное математическое (и не только) образование, каковы его принципы и цели. Прежде чем приступать к такому разговору, изложим кратко программу курса.

Многочлены от нескольких переменных и геометрия

1. Понятие одночлена и многочлена от нескольких переменных. Разложение по степеням одной из переменных. Разложение в сумму однородных компонент. Произведение двух ненулевых многочленов от нескольких переменных не равно нулю. Степень произведения двух многочленов.
2. Понятие нуля многочлена от двух переменных. Алгебраические кривые. Коники и кубики. Декартов лист. Вырожденные кривые.
3. Выделение линейного множителя из многочлена, который зануляется на прямой. Теорема о девяти точках на кубической кривой и следствия из неё (теоремы Паскаля и Паппа).
4. Пучки коник. Теорема о бабочке. Описание пучка коник, проходящего через данные четыре точки. Ортопучок треугольника.

Идеалы. Теорема Гильберта о базисе.

5. Понятие кольца. Многочлены от n переменных как многочлены от одной переменной с коэффициентами в кольце от $n-1$ переменных. Кольцо целых гауссовых чисел.
6. Обратимые и неразложимые элементы кольца. Факториальность (постановка задачи). Примеры колец, не удовлетворяющих условию факториальности.

7. Факториальность кольца многочленов от двух переменных и кольца целых гауссовых чисел.
8. Понятие евклидова кольца. Связь между евклидовостью и факториальностью.
9. Поле частных. Теорема о существовании поля частных.
10. Теорема о факториальности кольца многочленов с коэффициентами в факториальном кольце. Факториальность кольца многочленов с произвольным числом переменных.
11. Теорема о конечности множества общих нулей двух многочленов, не имеющих общих неприводимых множителей.
12. Формулировка теоремы Гильберта о базисе на языке многочленов. Переход к языку идеалов. Случай многочленов от одной переменной. Главный идеал кольца. Идеалы многочленов, зануляющихся в данной точке.
13. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов.
14. Обрыв возрастающих цепочек идеалов в кольце многочленов от двух переменных с коэффициентами в поле. Доказательство теоремы Гильберта о базисе для кольца многочленов от двух переменных.
15. Эквивалентные определения нётерова кольца. Нётеровы кольца как обобщение колец главных идеалов. Простейшие примеры нётеровых колец. Примеры колец, не являющихся нётеровыми. Свойства нётеровых колец.
16. Теорема Гильберта о базисе.
17. Факторкольца. Кольцо лорановских многочленов как факторкольцо. Простые и максимальные идеалы.

Теорема Гильберта о нулях. Алгебраические множества.

18. Формулировка теоремы Гильберта о нулях и теоремы о совместности. Редукция теоремы о совместности к описанию максимальных идеалов в кольце многочленов от нескольких переменных.
19. Описание максимальных идеалов по Амицуру.
20. Теорема Нётера о нормализации.
21. Понятие алгебраического множества. Неприводимые алгебраические множества: определения и примеры.
22. Теорема о разложении алгебраического множества в объединение неприводимых.
23. Размерность алгебраического множества: от интуитивного представления к строгому определению.

Содержание предлагаемого курса трудно назвать оригинальным. Книг по коммутативной алгебре много. Среди наиболее известных в нашей стране можно упомянуть замечательную книгу М. Атьи и И. Макдональда [1]. Наличие в лекциях по коммутативной алгебре отдельных параграфов, более уместных в учебнике по алгебраической геометрии, также не является чем-то новым. В таком духе выдержана переведенная на русский язык книга М. Рида [2] и не переведенная, к сожалению, монография [3], название которой говорит само за себя. Глава “Коммутативные кольца” современного университетского учебника [4] также содержит параграф, посвященный некоторым понятиям алгебраической геометрии. Безусловно, нужно упомянуть недавно вышедшую книгу [5], весьма близкую предлагаемому курсу. В общем, с точки зрения подбора материала здесь всё хорошо известно. В то же время, на наш взгляд, методические принципы курса заслуживают некоторого обсуждения.

Как уже говорилось, на протяжении нескольких лет спецкурс читается студентам первого и второго курсов математического факультета. В то же время первый раздел посвящен задачам, близким, а часто и известным по формулировке, подготовленному школьнику (задача о бабочке, теорема Паскаля, теорема Паппа). С некоторой долей лукавства можно сказать, что "никакие предварительные знания не предполагаются", хотя, конечно же, опыт работы с многочленами от одной переменной и знание основных фактов о них являются необходимыми для по-настоящему глубокого понимания. Но прямых ссылок на какие-либо теоремы стандартных университетских курсов действительно нет. Только последний раздел требует владения понятием размерности векторного пространства. На основании собственных преподавательских впечатлений могу сказать, что занятия проходят при огромном интересе аудитории. Классические методы решения этих задач достаточно сложны и, что хуже всего, искусственны. Доказательства с помощью многочленов от нескольких переменных, конечно, очень неожиданны, но основаны на использовании не специальных приемов, а некоторого метода. Сам факт существования единого метода, позволяющего получить доказательства далеких, на первый взгляд, теорем, воспринимается студентом с формирующимся математическим вкусом как весьма приятная неожиданность.

Насколько же оправдана такая элементарная преамбула в университетском спецкурсе? Думается, что вполне оправдана. Мы мало думаем о проблеме преемственности школьного и университетского обучения, а, между тем, проблема весьма серьезна. Традиционно урок хорошего школьного учителя математики в нашей стране ориентирован на пробуждение интеллектуальной активности школьника и содержит существенные диалогические элементы. Ученики таких педагогов, пока еще составляющие, к счастью, значительную часть студентов математических факультетов, справедливо надеются на то, что изучение любимого предмета в университете по-прежнему будет проходить в ситуации общения. Но они при этом часто оказываются обманутыми. Сама форма университетской лекции предполагает "молчаливость" аудитории. Семинарские занятия часто бывают посвящены освоению технически сложных алгоритмов, что также не способствует интеллектуальной активности. К тому же, резкий разрыв между материалами университетских курсов и содержанием школьного образования приглушает познавательную активность обучаемого. В конечном итоге, это обычный эффект растерянности человека в незнакомой ситуации. С этим трудно, да и не всегда нужно бороться. Не надо только забывать о существовании проблемы, которая часто приводит к потере талантливого студента для математики и математического образования, и, в любом случае, требует для своего решения через 2–3 года значительных усилий научного руководителя, восстанавливающего в меру своего педагогического таланта ситуацию "учеба как диалог". В этой связи хочется обратить внимание на необходимость курсов или отдельных глав, обращающихся к школьному опыту студента. Именно на таком материале проще “спровоцировать” внутренний диалог, поддержав, таким образом, интеллектуальную активность обучаемого. Точнее, речь идет не просто об обращении к школьному материалу (это на младших курсах происходит регулярно), а о взгляде на него в свете совершенно нешкольных идей и понятий, то есть, о том, что Феликс Клейн называл взглядом на элементарную математику “с высшей точки зрения”. Думается, что вводная глава спецкурса дает пусть очень скромный, но всё же вклад в решение этой проблемы.

Вторая глава занимает основное место в курсе. Её цель — не только изложить основные понятия коммутативной алгебры, но и, в первую очередь, дать представление о том, как “разворачивается” понятийный аппарат математической теории как таковой. При этом знакомство с понятийным аппаратом происходит в процессе рассмотрения задач, приводящих к возникновению соответствующих понятий. В качестве примера можно привести параграф, демонстрирующий, как понятие поля частных возникает в ходе попытки проанализировать доказательство факториальности кольца многочленов от нескольких переменных. Или параграф с доказательством теоремы Гильберта о базисе, демонстрирующий, как понятие идеала помогает решить задачу, допускающую формулировку на вполне абитуриентском языке следствий и равносильностей алгебраических уравнений. Естественный консерватизм обучающегося, основанный в конечном итоге на подсознательном приятии бритвы Оккама (“не вводи лишних слов”), и помноженный на психологически понятную “антипонятийность” сознания вчерашнего школьника (“а я и без всяких методов всё решу”), здесь оказывается полностью преодоленным.

Хотелось бы отметить, что слова “приводящих к возникновению понятий” не следует понимать непременно в историческом аспекте. Далеко не всегда удается объяснить первокурсникам, как возникло то или иное понятие исторически, но такая цель в рамках данного курса и не ставится. Мы стараемся погрузить слушателя в ситуацию “рождение понятия в ходе решения задачи”, сняв тем самым очень опасный внутренний вопрос “а зачем всё это надо?”. Основанием для постановки такого вопроса, как правило, является не поиск практических применений, а внутренний протест против немотивированности появления теорем и определений. Он не только обоснован психологически, но и является для преподавателя полезным напоминанием о необходимости показывать математику как глубоко органичную систему с богатыми внутренними связями.

Третья глава отличается от второй существенно более высоким уровнем сложности. Её основное содержание — доказательство теоремы Гильберта о нулях и изложение некоторых вопросов теории алгебраических множеств. При этом методический принцип изложения материала с опорой на активизированные преподавателем интуитивные представления слушателя об объекте изучения остается неизменным. В связи с этим очень удачным оказывается и почти школьная элементарность формулировки теоремы о нулях, и неожиданная связь алгебраических множеств с абсолютно классическими олимпиадными задачами, без решения которых не обходится ни один достаточно продолжительный школьный математический кружок. Так, например, редукция утверждения о разложении алгебраического множества в конечное объединение неприводимых подмножеств к теореме Гильберта о базисе позволяет сформулировать следующую задачу по нашей теме "Комбинаторика бесконечности":

Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

После изложения программы и методических принципов построения курса хочется более четко сформулировать его цели. Ясно, что он не является, в отличие от большинства университетских спецкурсов, введением в профессиональную деятельность в данной области, поскольку объем излагаемого материала слишком мал. Безусловно, темп можно было бы увеличить, изложив материал более формально. Это не только допустимо в рамках обычного спецкурса, но и совершенно необходимо, поскольку предполагает существенную самостоятельную работу слушателя по осмыслению методов и отслеживанию внутренних связей. Собственно говоря, именно способность к такой работе является первым и важнейшим условием пригодности студента для самостоятельной научной деятельности. Наш курс требует для своего восприятия достаточного напряжения, но, в то же время, оказывается для активного слушателя очень "комфортным", причем забота об этой интеллектуальной комфортности (а не просто о понятности) занимает непропорционально большое место, если смотреть с точки зрения методики чтения обычных спецкурсов. По жанру — это скорее "курс дополнительного образования", причем дополнительное образование мы понимаем не в принятом ныне в практике высшей школы смысле обучения дополнительным профессиональным навыкам. Речь идет скорее о таком понимании этого термина, который используется применительно к занятиям математических кружков школьников. Их отличие от обычных занятий состоит в том, что развивающие цели рассматриваются как приоритетные по отношению к обучающим, причем развитие понимается как рост логической культуры и приобщение к профессиональному мышлению, специфичному в данной области. Такие занятия могут и часто становятся началом серьезной профессиональной работы, но не менее важна и другая их функция. Она заключается в создании ситуаций, вовлекающих в процесс профессионального творческого мышления людей, которые в будущем профессионально в этой области работать не будут. Речь идет не о подготовке к будущей профессиональной "математической жизни", а об организации такой жизни в данный момент и в рамках тех возможностей, которые предоставляет уровень подготовки слушателя. В наше время значительная часть студентов математического факультета не планирует заниматься не только научной работой, но и вообще работой, основанной на серьезном использовании математики. Тем важнее дать им опыт "математической жизни" в любой момент, когда это оказывается возможным.

Есть и еще один аргумент в пользу внедрения лекционных курсов такого типа. Сейчас много говорят о проблемах повышения качества университетского математического образования. При этом акцент делается, в первую очередь, на усовершенствование форм контроля деятельности студента и педагога. Но вопрос повышения качества есть, прежде всего, вопрос методический. Повышать качество обучения — значит, работать над гибкостью и нестандартностью мышления студента, непосредственно влиять на рост его логической культуры и математической интуиции. Методические особенности курсов дополнительного образования делают их важными инструментами решения этих задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972. 160 с.
2. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. — М.: Мир, 1991. 149 с.
3. Eisenbud D. Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry. — Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, 1995. 797 p.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: Факториал, 1999. 527 с.
5. Кокс Д., Литтл Дж., О Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000. 687 с.

SOME ELEMENTS OF COMMUTATIVE ALGEBRA AS A SUPPLEMENTARY MATHEMATICAL COURSE

A. S. Shtern

An account of course of studies “Polynomials in any number of variables (an elementary introduction to commutative algebra)” is given. Methodical peculiarities of course and its position in extended mathematical education system are subjects of the article. School mathematical circle syllabus contains some questions of our course and we analyze this connection.

Keywords: commutative algebra, polynomial, ideal, algebraic set.