

АРХИВ МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В РОССИИ

Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и её преподаванием.

С. Д. Пуассон

**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ**

Л. Д. Кудрявцев

Приводится отрывок из книги Л. Д. Кудрявцева “Современная математика и её преподавание”, не переиздававшейся с 1985 года. Освещается уникальный опыт преподавания математики, накопленный в Московском физико-техническом институте. Л. Д. Кудрявцевым сформулированы и обоснованы основные положения, которые должны быть положены в основу обучения математике в вузе. Статья включает первые пять из десяти положений. Публикация остальных положений предполагается в следующем выпуске журнала.

Ключевые слова: математика в вузе, методология и методика преподавания.

1. О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ

Великий математик Карл Фридрих Гаусс в свое время назвал математику “царицей всех наук”. Математика скорее добрая фея, только получить у нее можно не волшебную палочку, а надежный и точный инструмент — математические методы.

И. Г. Петровский

Как это ни странно, уже само понимание предмета математики, а значит, его содержание и расстановка в нем акцентов, вызывает разногласие. Мы будем исходить из следующего основного положения.

Положение первое. *В курсе математики изучаются математические структуры.*

Объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты (структуры), у которых описан ряд отношений между их элементами (будем их называть математическими структурами). Математические структуры могут являться непосредственными математическими моделями реальных явлений. В математических курсах в высших специальных (но не математических) учебных заведениях и должны, конечно, в первую очередь изучаться математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления (как, например, производная, моделирующая скорость движения материальной точки, интеграл — работу силы, элементы математической логики — этапы работы вычислительной машины, небесная механика — движение тел в космосе под действием гравитационных сил, и т. п.), а математические структуры, не являющиеся непосредственной математической моделью реального явления, лишь постольку, поскольку они являются удобным математическим аппаратом для изучения математических моделей реальных явлений.

Конечно, цель изучения математических структур в чистой и прикладной математике различны: в первом случае нас интересуют свойства структур

сами по себе, во втором — те выводы, которые можно сделать из их изучения о тех реальных объектах, которые они моделируют.

В математике рассматриваются соотношения между элементами математических структур, количественные и качественные связи между ними. Для чистой математики важна не природа рассматриваемых объектов, а лишь имеющиеся между ними соотношения. Одна и та же математическая структура может описывать (с определенным приближением) свойства очень далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, например, формула

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

может описывать и закон Ньютона притяжения масс, и закон Кулона притяжения электрических зарядов. Величины масс и зарядов, фигурирующие в этих законах, измеряются в разных единицах, имеют разную размерность. В математической же формуле соответствующие этим законам математические операции (в данном случае умножение и деление) производятся по правилам действия над числами, независимо от того, значениями каких физических величин они являются.

Из сформулированного положения следует, что смысл математического понятия не зависит от области его дальнейшего применения, в частности, не зависит от специализации студента, которому разъясняется это понятие.

При этом следует подчеркнуть различие смысла и содержания математического понятия как такового и конкретного явления, для описания которого оно используется, например, понятия производной векторной функции и понятия скорости механического движения, понятия интеграла и понятия работы и т. п.

Сущность математики должна находить свое отражение при обучении математике прежде всего в разъяснении истинного смысла изучаемых математических понятий.

Это утверждение, кажущееся многим бесспорным, тем не менее, часто оспаривается. Некоторые считают, что те, кто интересуется математикой не самой по себе, а лишь математическими методами исследования конкретных задач, т. е. приложениями математики, должны обучаться специальной математике, а не той, которой занимаются сами математики. На самом деле такой специальной математики не существует. Смысл теоремы Пифагора или формулы конечных приращений Лагранжа не зависит от того, кто их использует: инженер или научный работник, прикладник или чистый математик. От будущей специальности студента зависит лишь содержание и объем курса математики, отбор математических понятий и фактов, отбор методов, общность и детализация изложения, подбор примеров, иллюстрирующих применение изучаемых математических понятий и методов к решению прикладных задач.

Можно, в принципе, учить приложениям математики вместо самой математики, исходя из будущей специализации. Говорить, например, будущим механикам, что производная есть механическая скорость, что интеграл — работа силы, и рассматривать только размерные величины. Конечно, это

будет уже не математика. Возможно, в отдельных случаях (крайне редких, которые даже трудно себе представить) это может оказаться целесообразным. В основном же такой метод обучения плох тем, что человек, изучавший такой специализированный курс, окажется беспомощным, когда он встретится с не изучавшейся им конкретной ситуацией, несмотря на то, что она будет требовать для её описания или изучения, по существу, того же самого математического аппарата, которому его обучали на конкретных примерах. Он будет беспомощен, поскольку он не был обучен общему подходу, не был приучен к рассмотрению абстрактных математических структур.

Поясним сказанное на примере. Предлагают, например, доказывать теорему о том, что функция, имеющая во всех точках интервала производную, равную нулю, является постоянной, следующим образом. Рассматривают производную как скорость материальной точки. Если скорость равна нулю, то материальная точка неподвижна, т. е. её путь не меняется — функция постоянна.

Даже если это рассуждение считать доказательством, допустимым для математики, то все равно оно не доказывает высказанного утверждения просто потому, что математическое понятие производной не адекватно физическому понятию механической скорости. Производная является лишь математической моделью механической скорости. Но она является математической моделью и многих других физических понятий, например силы тока, линейной плотности и т. д. и т. п. Если встать на предложенную точку зрения, то придется приведенную теорему доказывать столько раз, сколько имеется физических понятий и явлений, математической моделью которых является производная. Но даже и после этого математическая теорема о постоянстве на интервале функции с нулевой во всех точках производной не будет доказана! Нецелесообразность описанной методики очевидна.

Неслучайно в настоящее время наблюдается ярко выраженная тенденция сближения университетского и высшего технического образования на основе более общего подхода к изучаемым предметам. Современные темпы развития науки и техники таковы, что в силу быстрого изменения конкретных условий работы делается невыгодным готовить узких специалистов. Сейчас всё больше растет потребность в специалистах, которые могут быстро ориентироваться при изменении ситуации, способных правильно оценивать происходящие изменения, приводящие иной раз к качественно совершенно новым явлениям.

Эти качества прививаются не узко специальным образованием, а широким общим образованием университетского типа. В настоящее время во многих передовых высших учебных заведениях, готовящих специалистов по современной науке и технике, математические (а также физические, химические и др.) курсы изучаются по одинаковой программе, не зависящей от будущей специальности студента (например, физической, химической, аэродинамической и т. п.). Именно на основе единого институтского цикла, общего для всех факультетов, построена система подготовки специалистов разных профилей в Московском физико-техническом институте.

2. О ЕДИНСТВЕ МАТЕМАТИКИ

Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки: ведь математика — основа всего точного естествознания.

Д. Гильберт

Положение второе. *Математика едина.*

Это положение означает, что деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено, что чистая и прикладная математики являются частями единого неразрывного целого, называемого математикой, что эти части невозможно четко отделить одну от другой.

Сразу заметим, что это положение не означает тождества чистой и прикладной математики, подобно тому, как единство жизни не означает тождества одноклеточного организма и человека. Чистая и прикладная математики — разные части одной и той же науки, разные по своему содержанию, по своей значимости, по той роли, которую они играют в жизни современного общества.

Чтобы подтвердить справедливость высказанного тезиса о единстве математики, надо более обстоятельно разъяснить, что мы вкладываем в понятия “чистая математика” и “прикладная математика”.

Постановка задач и оценка результатов их решения в чистой и прикладной математике различны. Источники задач, которые решаются в прикладной математике, и конечные цели, которые преследует их решение, лежат вне математики, хотя промежуточные задачи, методы и цели могут иметь чисто математический характер (как, например, создание и изучение тех или иных численных алгоритмов) и, несмотря на то, что они являются промежуточным этапом, именно они часто являются не только принципиально важным, но и основным шагом в процессе решения основной задачи и достижения намеченной цели. Еще раз подчеркнем, что, таким образом, чистую и прикладную математику отличают, прежде всего, цели: чистая математика отвечает на математические вопросы, в ней решаются внутренние математические проблемы, а в прикладной — даются методы решения задач, возникающих вне математики.

Чистая математика, как это неоднократно отмечалось, представляет собой теорию математических структур, которые изучаются сами по себе без связи с реальными явлениями (физическими, химическими, биологическими, экономическими, социальными или какими-либо еще), которые они могут, но не обязаны, моделировать. При этом для чистой математики, как правило, характерно, что исследования (качественные и количественные) приводятся с достаточной общностью, изучаются не отдельные конкретные объекты, а определенные классы объектов, устанавливаются общие методы и алгоритмы решения широкого круга задач.

К прикладной же математике относится та часть математики, в которой изучаются математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления, т. е. прикладная математика есть наука, изучающая реальные явления математическими методами.

Как мы уже знаем, математическое изучение реальных объектов начинается с их математического моделирования, т. е. использования для их описания некоторых математических структур, либо уже ранее известных, либо специально построенных для рассматриваемого случая. Обычно эти модели записываются с помощью уравнений или неравенств или того и другого. В результате изучения этих моделей часто возникают другие математические модели (структуры), которые, в свою очередь, начинают изучаться, и, таким образом, прикладная математика является мощным источником новых математических структур. Исследования по прикладной математике нередко приводят к созданию целых новых научных направлений. Именно таким образом во второй половине XX века оформились в самостоятельные ветви математики теория информации, теория операций, теория случайных процессов, теория оптимального управления, математическая экономика и т. п. Более того, при исследовании тех или иных реальных объектов математическими методами возникли и новые самостоятельные науки, например, теоретическая механика, небесная механика, гидродинамика, квантовая физика и многие другие.

Целью изучения математических моделей в прикладной математике является в конечном итоге исследование соответствующего конкретного реального явления. Поэтому в прикладной математике наряду с изучением общих методов большое место занимает и изучение более частных специальных методов, непосредственно связанных с данным реальным объектом. Конечно, как и при отыскании математической модели, моделирующей рассматриваемое явление, при изучении этой модели не всегда удастся обойтись имеющимися в математике ресурсами. Даже в случае, когда имеются методы изучения нужной математической модели, эти методы могут оказаться не приспособленными для получения требуемых результатов. В этом случае приходится создавать новые специальные методы для решения поставленной задачи, которые также нередко оказываются источником новых общих методов в математике.

Прикладная математика, состоящая из математического моделирования реальных объектов, качественного и количественного анализа математических моделей реальных объектов, теории алгоритмов численного решения возникающих при этом анализе математических задач, математического обеспечения, нужного для осуществления вычислений по соответствующим алгоритмам на компьютерах и анализа численных решений задач, во всех своих разделах широко использует методы чистой математики. Действительно, и математическое моделирование, и качественные и количественные изучения математических моделей немыслимы без методов математического

анализа (в частности, теории дифференциальных уравнений и функционального анализа) и алгебры, а математическое обеспечение — без математической логики и той же алгебры. Эти обстоятельства и обеспечивают неразрывную связь между чистой и прикладной математикой.

Однако роль и значение прикладной и чистой математики в жизни общества совершенно различны. Уровень развития прикладной математики в стране, наличие современной электронно-вычислительной техники и умение её использовать составляют один из важных показателей экономической мощи страны. Эта специфика прикладной математики влечет за собой и особенности работы прикладных математиков, их большую ответственность за получаемые ими результаты, так как допущенная ошибка в проведенных ими расчетах может дорого обойтись людям. В то же самое время, если чистый математик допустит какую-либо ошибку в доказательстве какой-либо теоремы, это в худшем случае огорчит лишь нескольких его коллег. При всем этом следует еще раз подчеркнуть, что без развития чистой математики, без глубоких достижений в ней были бы невозможны и большие успехи, которые наблюдаются в прикладной математике.

Вот именно с этим и связано единство чистой и прикладной математики, о котором шла речь в высказанном положении. В нем говорилось о неразрывной связи чистой и прикладной математики, об общей сущности той и другой, заключающейся в изучении математических структур, в общности методов, применяемых для изучения этих структур, о невозможности изучать прикладные математические задачи без знания понятий чистой математики, без овладения этими понятиями.

Как уже отмечалось, многие математические модели и методы исследования, возникшие так или иначе в недрах прикладной математики, начинают изучаться сами по себе или, соответственно, применяться для изучения математических моделей (структур) без связи с реальными объектами и тем самым делают достоянием чистой математики. Наблюдается, безусловно, и обратное явление, при котором методы, созданные в чистой математике, находят свое эффективное применение в прикладной математике и, более того, в непосредственных приложениях математики к решению прикладных задач.

Всё сказанное уже показывает неразрывную связь чистой и прикладной математики. Однако указанная связь на самом деле более существенна и более глубока — она пронизывает всю сущность методов, применяемых в этих областях.

И это несмотря на то, что в той части математики, которую называют чистой, критерием для оценки полученных результатов является их логическая завершенность, установление новых связей между внешне далекими понятиями, наличие методов, дающих возможность решать новые задачи, короче, степень существенности продвижения вперед на пути познания свойств математических структур, а в прикладной математике критерием ценности результата является его практическая значимость, возможность

его использования для изучения или воздействия на изучаемое явление, прогнозирования его дальнейшего состояния и т. п. Дело в том, что как в чистой, так и в прикладной математике поставленные цели достигаются в принципе одним и тем же способом — изучением абстрактных математических структур. Именно это и является основой единства математики.

Вопросы численного решения задач приводят к новым проблемам, к новым постановкам, и оказывается, что теоретические качественные исследования (в частности, теоремы существования) помогают правильно их поставить. На базе фактов чистой математики возникают новые, характерные именно для численных методов, задачи: задача о наиболее “выгодном”, в том или ином смысле, способе численного решения, задача об устойчивости применяемого численного метода и т. п. Сама классическая форма математических теорем “если ..., то ...” приобретает, по словам А. Н. Тихонова, новый аспект. Годятся только те “если”, которые можно проверить на практике, которые можно задать с нужной степенью точности. Только такие “если” могут рассматриваться при решении прикладных задач.

Ситуация, при которой численные методы применяются для решения задачи, когда она теоретически достаточно полно исследована, является идеальной и не всегда наблюдается. Нередко численные методы применяются для решения задач, для которых не доказано существование решения и, более того, не обоснована корректность применяемых численных методов. Математические трудности, возникающие при решении таких задач, не вызывают сомнения и, конечно, заслуживают самого внимательного изучения.

Тесная взаимосвязь чистой и прикладной математики проявляется и в том, что современная вычислительная техника дает в руки математиков принципиально новые возможности не только для получения численных решений задач, но и для изучения теоретических проблем.

Замечательным примером использования современных компьютеров в исследованиях по чистой математике является решение знаменитой проблемы четырех красок, поставленной еще в середине XIX века.

Это проблема состоит в следующем. Плоскость разбивается на области (которые называются “странами”) с помощью конечного числа гладких кривых без самопересечений. При этом любые две из этих кривых либо не пересекаются, либо пересекаются в конечных точках, и любая конечная точка каждой из указанных кривых является и конечной точкой по крайней мере еще одной кривой. Тогда каждая такая кривая входит в границу в точности двух стран, называемых соседними. Совокупность конечного числа полученных таким образом стран называется “картой”.

Проблема состояла в нахождении минимального числа различных цветов, которыми можно раскрасить любую карту таким образом, чтобы каждые две соседние страны были окрашены в разные цвета (такая раскраска карты называется правильной).

В конце XIX века было установлено, что для правильной раскраски любой карты достаточно пяти цветов, пяти различных красок. А можно ли это сделать с помощью лишь четырех красок? Несмотря на многочисленные попытки ответить на этот вопрос (получивший название проблемы четырех красок), до самого последнего времени ответа на него не было получено. В силу простоты своей формулировки эта проблема постоянно привлекала к себе внимание, причем не только профессионалов-математиков, но и многочисленных любителей. И вот было опубликовано сообщение о том, что проблема четырех красок решена американскими математиками К. Апелем и В. Хакеном [1]. Именно ими доказано, что любую карту можно раскрасить правильным образом с помощью четырех различных красок, т.е. так, что каждые две соседние страны будут окрашены в различные цвета. При этом, что очень интересно, решение этой проблемы было получено с существенным использованием современных компьютеров.

На первый взгляд это выглядит неожиданно и даже неправдоподобно: доказательство чисто геометрической теоремы с помощью вычислений на счетной машине!

Для пояснения заметим прежде всего, что проблеме четырех красок можно придать арифметический характер, что, кстати, было понято еще в XIX веке. Это удобно сделать, сформулировав проблему четырех красок на языке графов, перейдя от заданной карты к так называемому дуальному к ней графу. Для этого в каждой стране выбирается по точке (вершине графа), которые соединяются между собой кривыми (ребрами графа) в том и только том случае, если эти точки были выбраны в соседних странах.

Теперь ясно, что задачу о правильной раскраске карты можно заменить задачей правильной раскраски вершин получившегося плоского графа, т.е. такой раскраски, при которой две вершины графа, принадлежащие одному и тому же ребру, имеют разный цвет.

Начало изучению связей проблемы четырех красок с арифметическими свойствами графа было положено еще в том же XIX веке. Первые числовые оценки в этом направлении принадлежат английскому математику П. Хивуду (1890)¹. В течение последующих почти ста лет благодаря усилиям многих математиков на этом пути был сделан ряд существенных шагов вперед, но лишь только в 1976 году, когда с помощью компьютера было показано, что для правильной раскраски вершин рассматриваемых плоских графов достаточно четырех красок. Как же это было сделано? Ведь на компьютере можно провести вычисления лишь для конкретного, пусть с очень большим числом ребер и вершин, графа. Как же отсюда сделать заключение о раскраске любого конечного плоского графа? Для этого необходимо делать логические заключения, которые в нужной степени (во всяком случае, в настоящее время) вычислительные машины не умеют делать. Ведь компьютер не всемогущ: он

¹ Более подробно об арифметических соотношениях, связанных с проблемой четырех красок, можно прочитать в монографии [2].

может, например, вычислить сумму данного ряда с нужной нам точностью, но он не умеет исследовать сходимость рядов. Подобные действия остаются пока прерогативой человека.

Конечно, проблема четырех красок изучалась не с помощью одних лишь вычислений. Она была сначала редуцирована к некоторым частным вопросам, имеющим чисто арифметический характер, на которые можно было получить ответ, проведя определенные конкретные численные расчеты. Эти расчеты потребовали очень большого числа вычислений, которые были бы не под силу человеку, не вооруженному современной вычислительной техникой. Таким образом, нет ничего удивительного, что при исследовании проблемы четырех красок не применялись подобные методы в то время, когда не существовало быстродействующих вычислительных машин, которые теперь имеются в распоряжении человека.

Достигнутый на этом пути результат по решению проблемы четырех красок получен не только с помощью логических заключений, но и с помощью некоторого механического процесса — компьютерных вычислений. Отличие этого процесса от логических рассуждений состоит в том, что он, как и всякий реальный процесс, происходит в определенное время в определенном месте. Поэтому он не может в принципе быть воспроизведен: проведение повторных вычислений на компьютере является уже другим физическим процессом.

С математической точки зрения, результат исследования какой-либо проблемы, в частности проблемы четырех красок, полученной частично с помощью вычислений, проделанных на компьютере, нельзя признать за математическое (логическое) решение этой проблемы.

Всё же из этого примера видно, как продолжает расти сфера применения компьютеров: они привлекаются к решению всё большего и большего числа разнообразных задач, возникающих в самых различных областях человеческой деятельности.

Поскольку математика едина, то чистую математику и численные методы следует изучать как единое целое. Это естественно, ибо теоретические качественные и численные методы решения задач тесно переплетены между собой, причем численные методы базируются на тех или иных теоретических изысканиях, излагаются на языке абстрактных математических понятий. В силу всего сказанного численные методы разумно изучать на основе теоретического курса, а не подменять теоретический курс изложением набора отдельных рецептов численного решения задач.

При этом прежде всего надо четко представлять себе, что означает одновременное изучение чистой и прикладной математики, что означает прикладная направленность курса высшей математики, в чем конкретно состоит цель, к которой следует стремиться при обучении математике в высшем техническом учебном заведении.

Обычно для достижения этой цели рекомендуется вставлять в курс математики различные численные методы решения задач, как-то: приближенные вычисления значений функций, приближенные методы вычисления интегралов, приближенные методы решения систем линейных уравнений, приближенные методы вычисления обратных матриц, собственных значений матриц и так далее и тому подобное. Отмечается, что при этом желательно давать и методы оценки погрешностей полученных результатов — без указания хотя бы грубой оценки отклонения приближенного результата от истинного подобные методы не представляют интереса. Правда, иногда приходится мириться с тем фактом, что нужную погрешность удастся установить не теоретически, а лишь проверить экспериментально в ряде конкретных случаев. Это, конечно, не является доказательством полученной оценки, но иногда оказывается достаточным для поставленных практических целей.

Все эти рекомендации, безусловно, справедливы: изучение отдельных методов численного решения задач является неотъемлемой частью общего математического образования и безусловно полезно, причем не только для тех, кто будет заниматься приложениями математики к решению конкретных задач, но и для тех, кто будет разрабатывать теоретические проблемы в той или иной области человеческого знания, в том числе и в чистой математике. Но было бы заблуждением считать, что включение изучения решений отдельных задач численными методами полностью решает вопрос о прикладной направленности математического обучения. Решение этого вопроса в действительности гораздо сложнее.

Например, если представить себе деятельность геодезиста, связанную с измерениями на местности, то ему при проведении расчетов вряд ли поможет знание методов, с помощью которых были составлены таблицы, применяемые им в повседневной работе, или знание тех принципов, на которых основана реализация программ для ЭВМ, используемых им для проведения нужных вычислений. Для него гораздо важнее умение поставить математическую задачу, провести её необходимый предварительный качественный анализ, подготовить её для численного решения, а сам процесс этого решения для него не представляет интереса.

Умение нужным образом применять математические методы для решения практических задач с тем, чтобы получать требуемые результаты, и является основным критерием для оценки правильной постановки обучения, правильной ориентации будущих прикладных математиков. Для этого недостаточно (хотя, безусловно, и необходимо) знание одних численных методов. Нужно более широкое знакомство с математикой в целом, так как большей частью все конкретные задачи решаются с помощью и на основе имеющихся теорий, в том числе и математических. Для достижения указанной цели отбор изучаемого материала играет первостепенную роль. Было бы неправильным ограничиваться в основном изучением методов, близких к численным методам или по своему духу, или по непосредственным связям. Здесь имеют

в виду, например, методы выделения главной части функции в окрестности точки и методы аппроксимации функций в целом, применение этих методов для решения различных задач, касающихся как качественных исследований, так и имеющих оценочный характер. Безусловно, изучение подобных методов необходимо, очень полезно и потому должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Пренебрежение этими, в определенном смысле конкретными, разделами и преждевременное увлечение общими теориями на первых ступенях математического образования наносят последнему существенный вред.

Однако переход к изложению общих точек зрения на изучаемые объекты на следующих этапах обучения, безусловно, необходим, ибо он дает современному специалисту необходимую широту взгляда, необходимую математическую культуру. Следует только помнить, что общие теории особенно полезны тогда, когда имеются частные примеры для их применения, когда эти примеры сами по себе являются для учащегося естественными, хорошо знакомыми и освоенными.

Из всего сказанного следует, что практическая направленность математического обучения прежде всего имеет своей основой достаточное богатство и разнообразие изучаемого материала.

В связи с этим необходимо еще раз напомнить об имеющейся здесь опасности излагать материал “в полном объеме”. Следует всегда помнить, что дело не в том, чтобы сообщить учащемуся десятки теорем, а прежде всего в том, чтобы учащийся активно овладел основными понятиями. В основе обучения должно лежать положение, что “лучше знать меньше, да хорошо”, нежели иметь поверхностное знакомство со многими вопросами. На базе основательных знаний воспитывается математическая культура, необходимая для правильного использования математического аппарата. Надо всегда тщательно отбирать необходимый для студента минимум знаний, и только после его освоения можно допускать дальнейшее увеличение изучаемого материала. Имея прочную базу знаний, на её основе легко можно продолжить дальнейшее образование в нужном направлении. В этом случае качество легко переходит в количество.

Очень важными являются философско-идеологические основы курса высшей математики. Именно с самого начала в этом курсе при изучении теоретических основ следует идеологически готовить студента к численному решению задач, как к следующей, в известном смысле более сложной, ступени изучения математических моделей, и, вместе с тем, прививать ему практические навыки обращения с современной вычислительной техникой: для современного студента использование в случае необходимости ЭВМ должно быть естественным и простым. Как же всего этого достичь?

Прежде всего, с самого начала обучения математике в высшем учебном заведении целесообразно обращать внимание на характер доказательств рассматриваемых в курсе теорем, отмечая, когда он является алгоритмическим,

а когда нет. Например, полезно проанализировать тот факт, что доказательство теоремы о существовании максимума и минимума у непрерывной на отрезке функции, проводимое с помощью принципа компактности, не дает возможности фактически найти точки экстремума.

Весьма целесообразно параллельно с рассмотрением основных понятий математического анализа обучать сразу студентов численному решению задач, иллюстрирующих изучаемые понятия и их свойства. Благодатной темой для таких задач является, например, численное решение задач на отыскание экстремума функций и на решение систем линейных уравнений.

Иногда приходится слышать упреки, что в курсах математики увлекаются изучением внутренних математических понятий, ненужных для приложений. Обычно эти упреки касаются лишь стиля изложения, а не содержания курса по существу. Чтобы не давать повода для подобных упреков и для того, чтобы сразу правильно ориентировать студента при изучении математики (особенно при обучении будущих специалистов по приложениям математики), целесообразно с самого начала изучения математики в высших учебных заведениях указывать на связь с численными методами таких понятий, как, например, вложение отрезков, предел последовательности, запись действительных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей, — определения непрерывности функции и т. п. Такое методическое построение математических курсов обеспечивает неразрывную связь теоретических (качественных) и аналитических методов и численных, не противопоставляя одни другим.

3. О ВНУТРЕННЕЙ ЛОГИКЕ МАТЕМАТИКИ

Среди всех наук Математика пользуется особым уважением; основанием этому служит то единственное обстоятельство, что её положения абсолютно верны и неоспоримы, в то время как положения других наук до известной степени спорны, и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями.

А. Эйнштейн

Положение третье. *Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики.*

Всякая наука имеет свою внутреннюю структуру и свою внутреннюю логику, имеет внутренние связующие звенья, не всегда имеющие непосредственный выход за пределы самой науки, но играющие принципиальную роль внутри нее и являющиеся необходимыми для её понимания, усвоения и для умения правильно использовать её в приложениях. Это бесспорная истина, о которой часто забывают, когда начинают говорить о конкретном содержании какой-либо дисциплины.

В качестве конкретного примера внутреннего связующего звена можно указать теорему Коши о среднем значении двух функций — она представляет интерес не столько сама по себе, сколько потому, что с её помощью легко доказывается много полезных утверждений: оценка остаточного члена в формуле Тейлора, вывод правила Лопиталя для вычисления предела отношения функций.

Весьма красноречивым подтверждением сформулированного положения является высказывание А. Н. Крылова [3]: “При изучении анализа и механики и подобных отделов из аналитической геометрии и высшей алгебры должны соблюдаться определенная постепенность и полнота; многое может казаться излишним и непосредственных приложений не имеющим, но оно нужно для ясного усвоения дальнейшего и не может быть пропущено подобно скучной главе романа”.

Итак, критерий полезности для будущей специальности учащегося при составлении программы какой-либо математической дисциплины должен, безусловно, присутствовать, но ограничиться только им было бы большой ошибкой.

4. О ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Если ученик в школе не научился сам ничего творить, то в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы, научившись копировать, умели сделать самостоятельное приложение этих сведений.

Л. Н. Толстой

Положение четвертое. *Целью при обучении математике является приобретение учащимся определенного круга знаний, умения использовать изученные математические методы развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.*

Современный научный работник или инженер должен в достаточной степени хорошо владеть как классическими, так и современными методами исследования, которые могут применяться в его области. Для того чтобы иметь возможности с успехом использовать математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, иметь прежде всего необходимые для этого знания, уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели. Это утверждение кажется очевидным, однако то, что происходит в реальной жизни, далеко не всегда согласуется с ним. Поясню это на одном анекдотическом, но действительно происшедшем случае.

Аспирант, пишущий диссертацию на экономическую тему, пришел однажды к одному моему ученику и сказал, что он подсчитывает процент прироста свиней в одном совхозе, однако математика дает результаты, противоречащие здравому смыслу.

— Дело, — сказал он, обстоит следующим образом. Сначала свиней в совхозе не было, а через год их стало 50. Для подсчета процента их прироста я поделил 50 на нуль и помножил на 100, сократив нули, получил $\frac{50 \cdot 100}{0} = 500\%$. Однако по здравому смыслу, если бы сначала была одна свинья, а через год их бы стало снова 50, то процент прироста должен был бы быть меньше, однако тот же подсчет дает $\frac{50 \cdot 100}{1} = 5000\%$. Что-то в вашей математике не в порядке, — сказал аспирант (интересно, конечно, как он им стал?).

Это, конечно, уникальный анекдотический случай, но, к сожалению, использование того или иного математического аппарата вне возможных границ его применения встречается и на более высоком уровне. Я помню случай с одной докторской диссертацией по механике, где для “больших” скоростей использовалась формула, выведенная лишь для достаточно малых, что привело, естественно, к неверным выводам.

Перечисленными выше задачами не исчерпываются, однако, цели, которые ставятся при обучении студентов математике. Дело в том, что для того, чтобы иметь возможность разумно и успешно применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, как это отмечалось выше, иметь необходимые знания, уметь правильно обращаться с математикой, в частности, знать границы допустимого использования применяемого математического аппарата, овладеть им творчески, а не формально, в частности, уметь использовать не только готовые формулы, но и получать новые, если в них есть необходимость.

Этого, однако, недостаточно для умения решать задачи и изучать различные объекты математическими методами, да и вообще для математического творчества, т. е. для познания объективно существующих математических истин.

Недостаточно заучить ряд сведений — надо уметь математически думать. Этому трудно научить и, во всяком случае, на первом этапе обучения нелегко оценить результаты обучения в этом направлении. Математическое мышление не сводится, как это иногда кажется, лишь к логическим рассуждениям.

Для правильной постановки задачи, для оценки её данных, для выделения существенных из них и для выбора способа её решения необходимо обладать еще математической интуицией, фантазией и чувством гармонии, позволяющими предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен. Однако интуитивно почувствовать ожидаемый результат и наметить путь исследований с помощью правдоподобных рассуждений — это далеко не все. Интуитивное чувство гармонии является в математике лишь первой, хотя и весьма важной ступенью; интуитивные соображения и правдоподобные рассуждения отдаются на суд холодного рассудка для их изучения, доказательства или опровержения.

Следует заметить, что справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов, что не имеет для математики доказательной силы, а чисто логическим путем, по законам формальной логики. Конечно, и эксперименты, и примеры также играют большую роль в математических исследованиях: они могут или дать иллюстрацию утверждения, или опровергнуть его, или натолкнуть на какую-либо (в том числе и новую) идею. За последние годы в связи с быстрым развитием вычислительной техники особенно возросло значение математического эксперимента в прикладных исследованиях: здесь открылись качественно совершенно новые возможности и перспективы.

Правильно и удачно поставленный на компьютере “численный эксперимент” может привести к возникновению плодотворных гипотез, изучение которых позволит понять сущность изучаемого явления и в конце концов создать нужную теорию.

При математическом доказательстве гипотезы, при математическом решении задачи правильный выбор аппарата и метода — залог успеха и, более того, часто причина того, что в результате будет получено больше полезной информации об изучаемом предмете, чем заранее предполагалось. Это связано с тем, что математический аппарат таит в себе много скрытой информации и скрытого богатства, накапливавшихся в нем в течение веков, благодаря чему формулы могут оказаться “умнее” применяющего их и дать больше, чем от них ожидалось (еще Фарадей говорил, что формулы умнее того, кто их создал). Иллюстрацией этой ситуации является теоретическое открытие П. Дираком позитрона при анализе уравнений, которые он изучал, стараясь выяснить, почему заряд электрона принимает только дискретные значения.

Мысль о роли математических формул особенно ярко была высказана Генрихом Герцем [4]: “Трудно избежать чувства, что эти математические формулы ведут независимое существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее нас, мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено”.

Безусловно, приведенная схема математического мышления весьма идеализирована. Использование знаний, математического аппарата, интуиции, чувства гармонии, фантазии, умения думать, логики, эксперимента происходит не последовательно по этапам — всё это взаимодействует между собой в течение всего процесса, в котором к тому же играет большую роль наша подсознательная деятельность, проявляющая себя в “неожиданных озарениях”, приводящих к решению задачи после долгих и бесплодных попыток справиться с ней. Далее, далеко не всегда удается довести проводимые исследования до желаемого конца, но было бы, например, большим заблуждением думать, что для математики имеют значение только доказанные утверждения, только исследования, доведенные в известном смысле до логического завершения.

Можно привести много примеров математических теорий и положений, которые, будучи сформулированы лишь в виде гипотез, тем не менее оказывали или оказывают существенное влияние на развитие математики или её приложений.

Само собой разумеется, что сложность и иррациональность процесса мышления не означает, однако, невозможность планомерного и целеустремленного изучения и применения математики. Четкая организация и планирование всякого процесса обучения и научной деятельности на любом уровне очень полезны, так как существенно помогают их успешному проведению. В результате приобретенных в процессе обучения математических знаний и интуиции у учащегося появляется то, что обычно называется математической культурой. Её уровень после завершения обучения в высшем учебном заведении должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое математическое образование.

Анализу процесса математического творчества и использования математических методов при решении задач посвящено много интересных исследований [5–12].

5. О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Если бы мне вновь пришлось начать свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принял бы сперва за математику как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного.

Г. Галилей

Когда определена цель обучения, возникает естественный вопрос: а как её достичь? Какова должна быть методика преподавания?

Этот вопрос как никакой другой является объектом критики как внутренней со стороны самих математиков, так и внешней со стороны специалистов, в той или иной мере использующих математические методы. Весьма часто даже внутри одной кафедры математики бывает очень трудно договориться об едином методе изложения того или иного материала (впрочем, это далеко не всегда и нужно).

Сложность ситуации и причина трудности её устранения связана с тем, что, во всяком случае в настоящее время, методика преподавания математики еще не достигла научного уровня и основывается лишь на несистематизированном опыте отдельных преподавателей (к сожалению, многие ограничиваются лишь личным опытом) и на вере их в собственную правоту и непогрешимость. Во всех методических дискуссиях особо остро проявляется непримиримость и нетерпимость к другим точкам зрения, как это всегда бывает там, где в основе лежит догма и вера. Много несерьезных вещей говорится и говорится солидными и серьезными людьми по поводу методов

обучения математике. Не будем приводить соответствующие цитаты, дабы не обидеть их авторов, а постараемся сформулировать (на интуитивном уровне) некоторые основные принципы методики преподавания математики.

Положение пятое. *Преподавание математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и базироваться на уровне разумной строгости.*

Поскольку этот тезис каждый может понимать со своей точки зрения и вкладывать в него тот смысл, который ему хочется, то постараемся пояснить несколько детальнее, что здесь имеет в виду автор.

Тезис о простоте изложения означает, прежде всего, простоту построения курса в целом, такую его структуру, при которой делаются акценты на главные принципиальные идеи, и большая часть времени и внимания уделяется основным методам и фактам, ради которых читается данный курс. Всё это должно базироваться на точных логических безупречных определениях понятий (а отнюдь не на интуитивных о них представлениях) и четких формулировках высказываемых утверждений. Изложение материала должно быть таким, чтобы при дальнейшем изучении математики (более углубленном или более широком в смысле рассматриваемых объектов) не нужно будет переучиваться, а лишь пополнять уже имеющиеся знания. Вспомогательное и второстепенное должно явным образом занимать подчиненную роль и не требовать усилия для своего усвоения. Так, например, хотя теория вещественного числа является базисом математического анализа, в технических высших учебных заведениях нецелесообразно уделять ей много времени, так как она в этом случае является вспомогательной, а не основной частью курса математики.

Далее, при изложении какого-либо вопроса при прочих равных условиях следует отдавать предпочтение тому из способов, который проще. Конечно, появляются сразу разные “но”. Поясним это на примерах. Более простым разумно считать то доказательство, которое естественно, а не искусственно. Безусловно, эти понятия относительны. По остроумному замечанию Полия и Сеге [12], способ, примененный первый раз, является искусственным приемом, он же, примененный второй раз, делается методом. Добавим еще, что, как правило, следует отдавать предпочтение прямым доказательствам, а не от противного, и рассуждениям, основанным на непосредственном использовании определений и известных теорем, без привлечения дополнительных конструкций. При этом разбор по существу имеющейся ситуации, анализ отдельных случаев, которые могут встретиться, хотя и бывает громоздок, но более доходчив, нагляден, легче усваивается и позволяет лучше осознать суть дела, хотя и не всегда так изящен, как искусственный прием. Наконец, предпочтительнее выбирать те методы и те доказательства, которые допускают дальнейшие обобщения, и понимать при этом, что самое главное, чтобы студент усвоил идею и метод исследования, которые лежат в основе изучаемого вопроса. Для этого его не только не следует излагать в возможной общности,

а, наоборот, надо стараться разъяснить его сущность на наиболее простых примерах. Полезно помнить, что Д. Гильберт, начиная лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, выписывал на доске уравнения

$$y'' = 0$$

и

$$y'' + y = 0$$

и говорил: “Господа, на них вы можете изучить всю теорию и даже понять разницу в задачах с начальными или с краевыми условиями” [13].

Впрочем, ратуя за простоту, нельзя допускать перегибов. Разумная строгость в преподавании математики, о которой говорилось выше, является антитезой не только усложненности, но и упрощенчеству.

Продолжение следует

ЛИТЕРАТУРА

1. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable // Bulletin of the American Mathematical Society. September 1976. V. 82, № 5. P. 711–712.
2. Зыкова А. А. Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, 1969. §48. Проблема четырех красок.
3. Крылов А. Н. Воспоминания и очерки. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. 612 с.
4. Белл Э. Т. Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. С. 26.
5. Александров П. С. Мир ученого // Наука и жизнь. 1974. № 8. С. 2–9.
6. Колмогоров А. Н. О профессии математика. 3-е изд., доп. — М.: Изд-во МГУ, 1960. 30 с.
7. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Сов. радио, 1970 (там же приложение: Пуанкаре А. Математическое творчество). 152 с.
8. Поия Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: ИЛ, 1957. 535 с.
9. Поия Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970. 452 с.
10. Литлвуд Дж. Математическая смесь. 2-е изд. — М.: Наука, 1965. 151 с.
11. Постников А. Г. Культура занятий математикой. (Из записок ученого) // Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика”. № 7. — М.: Знание, 1975.
12. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1956. 396 с.
13. Рид К. Гильберт. — М.: Наука, 1977. 367 с.

THE FUNDAMENTALS OF MATHEMATICS TEACHING

L. D. Kudryavtsev

This article is an extract from the book “Modern mathematics and its teaching” by Kudryavtsev L. D. not reprinted since 1985. It describes the experience accumulated at Moscow University of Physics and Technics. Kudryavtsev L. D. introduced and proved the principles that are to form the basis of mathematics teaching at university. The article includes first five out of ten principles. The remaining principles will be published in the next issue of the journal.

Keywords: mathematics at university, methodology and methods of education.